1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{-1} & \boxed{-3} \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{-2} \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Kolonnerna 1, 2 och 4 i den radreducerade matrisen innehåller pivotelement så kolonnerna 1, 2 och 4 i A utgör en bas för $V(A)$, dvs $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ är en bas för $V(A) \subseteq \mathbb{R}^3$. Alltså är $V(A) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow V(A)^\perp = \{0\}$.

---

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ så en bas för $V(A)$ ges av $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
Vi ser direkt (eller använder Gram-Schmidt) att $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(A)$ så då $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ båda är i $V(A)$ och linjärt ober. och t.o.m. ortogonala så är en ON-bas för $V(A)$ given av $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alltså ges projektionen av $v = (x, y, z)^T$ på $V(A)$ som $\text{Proj}_{V(A)}\, v = (v^T e_1) e_1 + (v^T e_2) e_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}(2y + z) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{5}(2y+z) \\ \frac{1}{5}(2y+z) \end{pmatrix}$. $V(A)^\perp$ har ON-bas $e_3 = \frac{e_1 \times e_2}{|e_1 \times e_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, så $\text{Proj}_{V(A)^\perp}\, v = (v^T e_3) e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5}(y - 2z) \\ \frac{2}{5}(-y + 2z) \end{pmatrix}$. <u>Alternativt</u>: Projektionsmatrisen P är, om $A^T A$ är inverterbar, $P = A(A^T A)^{-1} A^T$. I vårt fall så är A ej fullrang, (som vi såg ovan). Låt $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Då gäller att $V(A) = V(A')$ och A' inverterbar så $A'^T A'$ är inverterbar och $(A'^T A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(A'^T A')^{-1} A'^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \therefore P = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{5}(2y+z) \\ \frac{1}{5}(2y+z) \end{pmatrix}$.

---

3. Vi söker en 3×3-matris A. Egenvektorerna för A är linjärt oberoende så A går att diagonalisera. Dvs $T^{-1} A T = D$ där D diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen och T matris med motsvarande egenvektorer som kolonner; $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vi finner nu T^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \overbrace{\begin{matrix} -1 & 3 & 2 \end{matrix}}^{T^{-1}} \\ 0 & 1 & 0 & \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 & \begin{matrix} 1 & -2 & -1 \end{matrix} \end{array}\right).$$

$$\therefore A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 8 & 5 \\ 6 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

---

4. QR-faktorisering fås genom Gram-Schmidt: Om $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ så är $A = QR$ där $Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & q_1^T a_3 \\ & q_2^T a_2 & q_2^T a_3 \\ & & q_3^T a_3 \end{pmatrix}$ där $q_j = a'_j / \|a'_j\|$ och $a'_j = a_j - (q_1^T a_j) q_1 - \ldots - (q_{j-1}^T a_j) q_{j-1}$. I vårt fall för A är $a'_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $q_1^T a_1 = \sqrt{2}$; $a'_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q_1^T a_2 = 1/\sqrt{2}$, $q_2^T a_2 = 3/\sqrt{6}$; $a'_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 q_1 - 0 q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ & 3/\sqrt{6} & 0 \\ & & 3/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

B har ej fullrang men samma procedur ger $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 4/\sqrt{3} & 5/\sqrt{3} \\ & 2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ & & 0 \end{pmatrix} = QR$ men Q är ej fullrang. Då R har en nolla i tredje raden, tredje kolonnen så spelar det ingen roll vad Q:s tredje rad är; tag t.ex. kryssprod. $(1,1,1) \times (-1,2,-1) = (-3,0,3)$ och Q:s tredje kolonn som $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ så att Q blir ortogonal. Dvs "QR-faktoriseringen" för B ej unik men blir unik, modulo tecken, om Q tas som ortogonalmatris.

---

5. Se boken.

---

6. Om λ egenvärde till A så finns $x \neq 0$ så $Ax = \lambda x \Rightarrow A^k x = \lambda^k x \Rightarrow A^k = \lambda^k E$. Insätting i ekv. $\Rightarrow$ $(\lambda^4 - \lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4})E = 0$, dvs $p(\lambda) = 4\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, en ekv. med heltalskoeff. så rationell rot om sådan finns är ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$. Vi ser att $\lambda = 1/2$ är en rot och faktiskt en dubbelrot. $\therefore\ p(\lambda) = (2\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1)$ så $\lambda = \pm i$ också rötter. Så $\pm i$, $\frac{1}{2}$ är de enda möjliga (egen)värdena för A:s fem (komplexa) egenvärden, så någon rot måste ge egenvärde med högre multiplicitet än 1. Om A reell, symm. så är egenvärdena reella dvs alla egenvärden är $1/2$ och då en sådan matris är diagonaliserbar har vi $T^t A T = D = \frac{1}{2}E \Rightarrow A = T(\frac{1}{2}E)T^t = \frac{1}{2}TT^t = \frac{1}{2}E$, ty T ortogonal.