Mat. Metoden fk, del A E2/Ex TMA980a/TMA215 2000-08-17

1. $A \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{1} \\ \\ \\ \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \boxed{-5} & \boxed{-3} \\ & \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array}$

$\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pivotelement i 1:a och 2:a kolonnen $\Rightarrow$ bas för $V(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$. För att finna $N(A)$ lös ekv. syst., dvs lös $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$. Låt $x_3 = s$, $x_4 = t \Rightarrow x_2 = t$, $x_1 = s + t \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och då $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende så är alltså bas för $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

---

2. Systemet kan skrivas $A\mathbf{x} = b$ där $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Lösningen $\mathbf{x}$ i minstakvadrat-mening ges av $A^t A\mathbf{x} = A^t b$. Nu är $A^t A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ och $A^t b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, så lös $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \end{array} \right)$ så lösningen är entydig och ges av $\mathbf{x} = \frac{3}{7}\binom{3}{2}$.

---

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \leftarrow (-) & \\ & \leftarrow (-) \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vidare läggs ett ggr första raden till andra raden dvs minus första raden dras från andra raden, så koeff. i L på kolonn 1, rad 2 är -1. På liknande sätt ses att $L_{31} = 1$. L har ettor på diagonalen och annars nollelement. Alltså $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

4. Egenvärden λ fås genom $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} +$

$+2\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-9)$ så $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$. Egenvektorer: $\lambda_1 = -3$:
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ har lösn. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
$\lambda_2 = 0$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ har lösn. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 3$:
$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ har lösn. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\therefore Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = Q^tAQ = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, så $A^{100} = QD^{100}Q^t =$
$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{100} & & \\ & 0 & \\ & & 3^{100} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 3^{98}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

---

5. Se boken.

---

6. Då A reell och symmetrisk så är egenvärdena alla reella och då A symmetrisk så är egenvektorer hörande till olika egenvärden ortogonala. A har tre egenvärden och i uppg. ges att 1 och 0 är egenvärden. Kalla det tredje egenvärdet $\lambda \in \mathbb{R}$. Om $\lambda \neq 0, 1$, så är egenvektorn hörande till λ alltså ortogonal mot $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dvs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ så att $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor för λ. Om $\lambda = 0$ eller 1 argumenterar vi som följer: Spektralsatsen säger att det finns en ON-bas av egenvektorer och då $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortogonala så måste även $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vara egenvektor. $\therefore Q^tAQ = D \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ där $Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
$\therefore A = QDQ^t = \ldots = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1+3\lambda & -1+3\lambda \\ 2 & -1+3\lambda & 1+3\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.