

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, transformer, TMA980 och TMV070
2003-04-23, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon: Martin Adiels, tel. 0740-459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

1. Ett kausalt tidskontinuerligt LTI-filter har stegsvaret $(1 - \cos(t))e^{-t}\theta(t)$.

a) Motivera varför filtret är stabilt, bestäm filtrets amplitudkaraktistik och ange en tillståndsekvation för filtret. (4p)

b) Bestäm filtrets impulssvar. (2p)

c) Bestäm svaret på $2\sin(\sqrt{2}t)$ (3p) och svaret på $2\sin(\sqrt{2}t)\theta(t)$ (4p). (7p)

d) Visa att $E(y) \leq \frac{3}{2}E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x)$

$\left(E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)$ och y är svaret på x . (3p)

2. Operatorn $mv_T : f \mapsto mv_T f$ definieras genom $mv_T f(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau$ ($t \in \mathbb{R}$)

(ett medelvärde av f över ett intervall av längd T).

a) Visa att mv_T är ett stabilt LTI-filter. (3p)

b) Beräkna $mv_T f(t)$ för $f(t) = \text{sgn}(t)e^{-|t|}$. (4p)

3. Ett kausalt tidsdiskret filter har överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{3z}{4z^2 - 2z + 1}.$$

a) Motivera varför filtret är stabilt, bestäm filtrets amplitudkaraktistik och ange en tillståndsekvation för filtret. (6p)

b) Bestäm filtrets impulssvar. (3p)

c) Bestäm svaret på $\cos \frac{2n\pi}{3}$. (3p)

4. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt}, & 0 < x < 2, 0 < t \\ u(0, t) = u(2, t) = u'_t(x, 0) = 0, & u(x, 0) = \delta(x - 1) \end{cases}$$
 (6p)

5. a) Visa att $\theta' = \delta$. (3p)

b) Visa att ett tidskontinuerligt LTI-filter är ett faltningsfilter. (4p)

c) Visa att $x[n - N] \xrightarrow{z\text{-transform}} z^{-N} X(z)$ ($N \in \mathbb{Z}$) för diskreta signaler x . (2p)

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2001-08-21, kl. 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:** Rolf Liljendal, tel. 0740-459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnr. på varje inlämnat blad.

=====

1. Ett kausalt tidskontinuerligt filter F har tillståndsekvationen $y'' + 2y' + y = 2x'$.
 - a) Motivera varför F är ett stabilt LTI-filter.
Ange även F 's impulssvar och F 's amplitudkaraktistik. (5p)
 - b) Visa att $E(F(x)) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$. (3p)
 - c) Bestäm $F(\sin(t))$. (2p)
 - d) Bestäm $F(\sin(t)\theta(t))$. (3p)
 - e) Bestäm $F((e^t\theta(-t)) * (e^t\theta(-t)))$. (3p)
2. Funktionen f har perioden 2π och $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$.
 - a) Utveckla f' i Fourierserie. (4p)
 - b) Bestäm en periodisk partikulärlösning till $y'' + 2y' + y = 2f''$. [uppg.1!] (3p)
3. Beräkna $\left(\frac{a^n}{n!}\theta[n]\right) * \left(\frac{b^n}{n!}\theta[n]\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$. (3p)
4. I det tidsdiskreta filtret F bildas utsignalens värde som det aritmetiska medelvärde av insignalens tre senaste värden, dvs. $F : x[n] \mapsto y[n] = \frac{1}{3}(x[n-2] + x[n-1] + x[n])$.
 - a) Motivera varför F är ett kausalt, stabilt LTI-filter.
Ange även F 's impulssvar och F 's amplitudkaraktistik. (4p)
 - b) Bestäm $F(\sin(\frac{n\pi}{3}))$. (1p)
 - c) Bestäm $F(\sin(\frac{n\pi}{3})\theta[n])$. (2p)
 - d) Bestäm en insignal som ger utsignalen $7 \cdot 2^n \theta[n] - 3\delta[n] - 2\delta[n-1]$. (3p)
5. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} & \text{för } 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{för } t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u'_t(x,0) = 1 & \text{för } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$
. (6p)
6.
 - a) Definiera "distribution" och visa att $\overset{\text{Fourier}}{\delta} \supset 1$. (4p)
 - b) Visa $e^{j\Omega t} f(t) \overset{\text{Fourier}}{\supset} \hat{f}(\omega - \Omega)$ ($\Omega \in \mathbb{R}$). (2p)
 - c) Visa att $x[n-N] \overset{z\text{-transform}}{\supset} z^{-N} X(z)$ ($N \in \mathbb{Z}$) för diskreta signaler x . (2p)

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2001-04-18, kl. 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:** Erik Svensson, tel. 0740-459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnr. på varje inlämnat blad.

1. Ett tidskontinuerligt kausalt filter har tillståndsekvationen

$$y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 2x.$$

a) Är filtret stabilt? (2p)

b) Bestäm utsignalen då insignalen är $\sin(t)$. (3p)c) Bestäm utsignalen då insignalen är $3(t^2 + 2)e^{-t}\theta(t)$. (4p)d) Visa att $E(y) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig

$$\text{totalenergi } E(x) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right) \text{ och } y \text{ är svaret på } x. \quad (2p)$$

2. Funktionen
- f
- är jämn, har perioden 8 och för
- $0 \leq t \leq 4$
- är

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 < t < 3 \\ 0, & 3 < t \leq 4 \end{cases} \quad \text{Beräkna } f'(t) \text{ för } -2 < t < 4 \text{ och}$$

utveckla f' och med hjälp härav f i Fourierserie på cosinus-sinusform. (5p)

3. Visa att ekvationen
- $y'(t) + 2y(t) + e^{-2t} \int_{-\infty}^t e^{2\tau} y(\tau) d\tau = e^{-2t} \theta(t)$
- är en

faltningsekvation $y * k = f$ (ange kärnan k) och bestäm en lösning y . (5p)

4. Ett kausalt tidsdiskret LTI-filter har överföringsfunktion
- $H(z) = \frac{16z^2}{16z^4 - 1}$
- .

a) Visa att filtret är stabilt och bestäm filtrets impulssvar. (5p)

b) Ange filtrets tillståndsekvation och amplitudkaraktistik. (3p)

c) Bestäm utsignalen då insignalen är $x[n] = \cos \frac{n\pi}{4}$. (2p)

5. Bestäm en följd
- $a: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$
- som satisfierar

$$a[n] = 0 \text{ då } n \leq 0,$$

$$a[1] = 1 \text{ och } a[n+2] = a[n+1] - a[n] \text{ då } n \geq 0. \quad (4p)$$

6. Lös värmeledningsproblemet
- $$\begin{cases} u''_{xx} = u'_t, & 0 < x < 2, 0 < t \\ u'_x(0, t) = u'_x(2, t) = 0, & u(x, 0) = \delta(x-1). \end{cases} \quad (6p)$$

7. a) Definiera distribution och svag konvergens. (4p)

b) Visa att för ett stabilt tidsdiskret LTI-filter F med impulssvaret h gäller att $F(e^{j\alpha n}) = H(e^{j\alpha})e^{j\alpha n}$. (3p)c) Visa att $x_N = x * \delta_N$ ($N \in \mathbb{Z}$) för diskreta signaler x . (2p)

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2000-12-15, kl. 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:** Martin Adiels, tel. 0740-459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

=====

1. Ett tidskontinuerligt LTI-filter har stegsvaret $J(t) = e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) \theta(t)$.
 - a) Bestäm filtrets impulssvar, motivera varför filtret är kausalt och stabilt, ange filtrets tillståndsekvation och bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (6p)
 - b) Bestäm svaret på $\sin(\sqrt{2}t)$. (3p)
 - c) Visa att $E(y) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ och y är svaret på x . (2p)
2. Visa att ekvationen $y(t) + \int_0^{\infty} y'(t-\tau) e^{-\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 y'(t-\tau) e^{\tau} d\tau + e^{-|t|}$ är en faltningsekvation $y * k = f$ och bestäm en lösning y . (6p)
3. Ett kausalt tidsdiskret filter har tillståndsekvationen $4y[n] - y[n-2] = 3x[n-1] + 2x[n-2]$.
 - a) Visa att filtret är stabilt. (5p)
 - b) Bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (2p)
 - c) Bestäm utsignalen då insignalen är $x[n] = \sin \frac{n\pi}{2}$. (3p)
 - d) Bestäm utsignalen då insignalen är $x[n] = (-1)^n \left(3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \theta[n]$. (4p)
4. Lös problemet $\begin{cases} y[n+2] - 2y[n+1] + 2y[n] = 0, n \geq 0, \\ y[n] = 0, n < 0, y[0] = y[1] = 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$ (4p)
5. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0 \\ u'_y(x, 1) = \delta(x - \frac{1}{2}) \end{cases}.$ (6p)
6.
 - a) Visa att $\theta' = \delta$. (3p)
 - b) Visa att för ett stabilt tidskontinuerligt LTI-filter F med impulssvaret h gäller att $F(e^{j\alpha t}) = \hat{h}(\alpha) e^{j\alpha t}$. (3p)
 - c) Visa att $\sin(bt) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} \frac{b}{s^2 + b^2}$. (3p)

Tentamen i matematiska metoder, fk, delB, TMA980, 1999-08-17, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon:

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !

=====

1. a) Beräkna $(\cosh(t)\theta(t)) * (\cos(t)\theta(t))$. (3p)
b) Beräkna $(a^n \theta[n]) * (b^n \theta[n])$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Svaret skall ges utan Σ -tecken. (3p)
2. Ett LTI-filter har amplitudkaraktistiken $A(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$
och faskarakteristiken $\Phi(\omega) = -2 \arctan \omega$.
a) Bestäm filtrets impulssvar och visa att filtret är kausalt och stabilt.
Ange filtrets tillståndsekvation. (6p)
b) Bestäm svaret på $\cos t$. (2p)
c) Bestäm svaret på $\cos(t)\theta(t)$. (4p)
d) Bestäm svaret på $(1 + t)e^t \theta(-t)$. (4p)
3. Ett diskret LTI-filter har impulssvaret $h[n] = \left(\frac{-1}{3}\right)^n \theta[n]$.
a) Visa att filtret är kausalt och stabilt. Ange filtrets tillståndsekvation. (3p)
b) Bestäm svaret på $\cos \frac{n\pi}{2}$. (3p)
c) Bestäm svaret på $\cos(\frac{n\pi}{2})\theta[n]$. (5p)
4. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} + u'_t, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0, t) = u(\pi, t) = u(x, 0) = 0, & u'_t(x, 0) = x \end{cases}$$
. (7p)
5. a) Visa $\delta \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} 1$. (3p)
b) Härled Plancherels formler. (4p)
c) Visa $tf(t) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} -F'(s)$. (2p)
d) Vad menas med att ett filter är tidsinvariant? (1p)

mat. met. E2, f k, del B, gamla tentor, svar (03)**03-04-23**

1a) $A(\omega) = \sqrt{\frac{4+\omega^2}{4+\omega^4}}$, $y'' + 2y' + 2y = x' + 2x$ b) $e^{-t}(\cos t + \sin t)\theta(t)$
 c) $\sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)$ resp. $((\sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}e^{-t}\cos t))\theta(t)$

2b) $\frac{1}{T}(e^{-|t-T/2|} - e^{-|t+T/2|})$ 4) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos((n+\frac{1}{2})\pi t) \sin((n+\frac{1}{2})\pi x)$

3a) $A(\alpha) = 3(13 + 16\cos^2 \alpha - 20\cos \alpha)^{-\frac{1}{2}}$, $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = \frac{3}{4}x[n-1]$
 b) $h[n] = \frac{\sqrt{3}}{2^n} \sin \frac{n\pi}{3} \theta[n]$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\frac{2n\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{6} (\sin \frac{2n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos \frac{2n\pi}{3})$

01-08-21

1a) $2(1-t)e^{-t}\theta(t)$, $\frac{2|\omega|}{1+\omega^2}$ c) $\sin t$ d) $(\sin t - te^{-t})\theta(t)$ e) $-2te^{-|t|}$
 2a) $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cos((2k+1)t)$ b) $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{(1+2k+2k^2)\pi} \cos((2k+1)t - \arctan \frac{2k(k+1)}{2k+1})$ 3) $\frac{(a+b)^n}{n!} \theta[n]$

4a) $h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n-2] + \delta[n-1] + \delta[n])$, $A(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{3+2(\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha)}$
 b) $y[n] = \frac{1}{3}(\sin \frac{n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos \frac{n\pi}{3})$ c) $y[n] = 0$ för $n \leq 0$, $y[1] = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y[n] = \frac{1}{3}(\sin \frac{n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos \frac{n\pi}{3})$ för $n \geq 2$
 d) $x[n] = 12 \cdot 2^n \theta[n]$ 5) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi} \sin((2n+1)t) \sin((2n+1)x)$

01-04-18

1a) ja b) $-\frac{1}{5}(\sin t + 3\cos t)$ c) $2te^{-t}\theta(t)$ 2) $f'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) - \delta(t-3)$, $-2 < t < 4$,
 $f'(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \sin((2k+1)\frac{\pi}{4}) \sin((2k+1)\frac{\pi}{4}t)$, $f(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\sin((2k+1)\frac{\pi}{4})}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\frac{\pi}{4}t)$ 3) $e^{-2t} \sin t \theta(t)$
 4a) $h[n] = 16^{-m}$ då $n = 4m+1$, $m \geq 1$, $h[n] = 0$ annars b) $y[n-4] - 16y[n] = -16x[n-2]$,
 $A(\alpha) = \frac{16}{\sqrt{257-32\cos 4\alpha}}$ c) $\frac{16}{17} \sin \frac{n\pi}{4}$ 5) $a[n] = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3} \theta[n]$ 6) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x)$

00-12-15

1a) $h(t) = \delta(t) - (2e^{-2t} \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2}e^{-2t} \sin \sqrt{2}t)\theta(t)$, $A(\omega) = |\omega| \sqrt{\frac{\omega^2+4}{\omega^4-8\omega^2+36}}$
 b) $\frac{1}{6} \sin \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \sqrt{2}t$ 2) $y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{\sqrt{3}}}$ 3b) $\sqrt{\frac{13+12\cos \alpha}{17-8\cos 2\alpha}}$ c) $-\frac{1}{5}(2\sin \frac{n\pi}{2} + 3\cos \frac{n\pi}{2})$
 d) $(2^{-n} - (-1)^n)\theta[n]$ 4) $(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} \theta[n]$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(1+2n)\pi \cosh((1+2n)\pi)} \sinh((1+2n)\pi y) \sin((1+2n)\pi x)$

99-08-17

1a) $\frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)\theta(t)$ b) $(n+1)a^n \theta[n]$ om $a = b$, $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \theta[n]$ om $a \neq b$
 2a) $h(t) = 2te^{-t}\theta(t)$, tillst.ekv: $y'' + 2y' + y = 2x$ b) $\sin t$ c) $(\sin t - te^{-t})\theta(t)$ d) $\frac{1}{2}te^{-|t|}$
 3a) $y[n-1] + 3y[n] = 3x[n]$ b) $\frac{1}{10}(9\cos \frac{n\pi}{2} - 3\sin \frac{n\pi}{2})$ c) $\frac{1}{10}(9\cos \frac{n\pi}{2} - 3\sin \frac{n\pi}{2} + (-\frac{1}{3})^n)\theta[n]$
 4) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1} e^{-\frac{t}{2}}}{n\sqrt{4n^2-1}} \sin(\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}t) \sin(nx)$