Datorlaborationer i matematiska metoder E2, fk, del B (TMA980), ht 03

- Laborationen är ej obligatorisk. Den består av tre uppgifter som kan ge en bonuspoäng var vid tentamina i matematiska metoder, fk, del B, 03-12-19, 04-04-14 och augusti 04. Uppg. 1 skall göras läsvecka 5, uppg. 2 lv 6, uppg. 3 lv 6/7.
- Laborationen skall lämnas in till mig senast ti, 9/12, kl. 9^{45} (efter föreläsningen). Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, på blad 1 med *maple*; blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej. Laborationen lämnas tillbaka med tentan.

Syfte

Du skall lära dig att utnyttja datorn i denna kurs för att utföra beräkningar och för att visualisera dina resultat och därmed öka förståelsen. Laborationen tar upp:

- Spektral avskärning: hur bra approximerar F-integralen resp. F-serien en funktion?
- Laplace-, Fourier-, *z*-transformation: beräkning, amplitudspektrum, energi, tillämpning på filter (lösning av begynnelsevärdesproblem, stabilitet, sinustest).
- Ortogonalserier.

Uppgift 1

Denna uppgift behandlar Laplacetransformation och Fouriertransformation. Du skall lära dig att transformera med maple och se hur bra F-integralen approximerar en funktion (spec. θ resp. δ).

a) Rita den spektrala avskärningen $\theta_\Omega(t)$ av $\theta(t)$ för $\Omega = 12\pi$ och för $\Omega = 2000$ i samma diagram $(-1 < t < 1)$.

b) Rita den spektrala avskärningen $\delta_\Omega(t)$ av $\delta(t)$ för $\Omega = 10\pi$ och för $\Omega = 39\pi$ i var sitt diagram $(-2 < t < 2)$.

c) Laplacetransformera $\left(\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\sinh(2x)}{x}\right)\theta(x)$, inverstransformera $\frac{s^2+s+2}{(s+1)^2(s^2+1)}$.

d) Fouriertransformera $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x} e^{-|x|}$, rita $f(x)$ och den spektrala avskärningen $f_\Omega(x)$ av f för $\Omega = 3\pi$ i samma diagram $(-3 < x < 3)$.

Uppgift 2

Denna uppgift behandlar tidskontinuerliga filter. Du skall öva in begreppen filter, frekvensöverföringsfunktion, amplitudkarakteristik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol), sinussvar (transienter)...

Ett kausalt filter F har tillståndsekvationen $P(D)y = Q(D)x$ med $P(D) = D^4 + 5D^3 + 12D^2 + 16D + 8$ och $Q(D) = \frac{1}{5}(40D + 41)$.

a) Bestäm filtrets impulssvaret h och filtrets stegsvar J.

b) Är filtret stabilt?

c) Rita filtrets amplitudkarakteristik för $|\omega| < 9$ och beskriv filtret.

d) Vilket filter fås om man ersätter $Q(D)$ med $Q_1(D) = \frac{1}{40}\left(40D^4 + 41\right)$?

e) Bestäm svaret på $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$ och på $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,\theta(t)$ och rita dessa svar för $-1 < t < 6$ i samma diagram.

f) Bestäm $y(t)$ = svaret på $x(t) = e^{-|t|}\cos 2t$ och rita $x(t)$ och $y(t)$ för $-6 < t < 6$ i samma diagram.

Uppgift 3

Denna uppgift behandlar tidsdiskreta filter och z-transform. Du skall öva in begreppen frekvenssvar (sinussvar), amplitudkarakteristik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol).

Ett kausalt diskret LTI-filter har överföringsfunktionen $H(z) = \frac{96z^4 - 260z^3 + 37z^2 - 41z}{144z^4 - 84z^3 - 30z^2 + 33z - 18}$.

a) Rita enhetscirkeln och polerna. Är filtret stabilt?

b) Beräkna filtrets impulssvar h och rita $h[n]$ för $0 \le n \le 11$.

c) Rita filtrets amplitudkarakteristik $|H(e^{j\alpha})|$ för $|\alpha| < \pi$ och ange filtrets typ.

d) Bestäm svaret på $\sin\frac{n\pi}{4}$ och på $\sin\frac{n\pi}{4}\,\theta[n]$ och rita dessa svar för $-2 \le n \le 19$ i samma diagram.

Anvisningar, ledningar, tips

Allmänt

Förbered dig innan du sätter dig vid datorn, skriv ner det du vill göra med datorn. Gå igenom *maple* exemplen först. Försök även att lösa uppgifterna så långt det går för hand (*maple* kontrollräknar). Läs uppgiftstexten noggrant (t.ex. "rita i samma plot" eller "i var sitt plot"), **kommentera** alltid resultatet (*maples* svar), **svara** på frågorna! Kolla rimligheten av resultaten! Följ anvisningarna! Glöm ej namn/persnr. på varje blad, häfta ihop bladen!

- För beräkning av Laplace- resp. Fourier-transform och deras inversa transformer skall integral-transformations-paketet laddas in (*with*(*inttrans*)).
- *Maple* kan räkna med δ (= *Dirac*) och θ (= *Heaviside*).
- Litteraturtips: *R.B.Israel*: Calculus: The Maple Way (Addison-Wesley,1996)

Till uppgift 1

a),b) $\theta_\Omega(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\Omega t)$, $\delta_\Omega(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}$ (föreläsning, BB, ex. 2.3 sid. 5)

c) Se ex2.

d) Följ ex3: för att kunna beräkna (numeriskt) och rita den spektrala avskärningen skall du beräkna imaginärdelen av integranden $\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}$ (med *Im*, *evalc* och *simplify*) och motivera att den är udda (ej trivialt, bevis krävs, låt *maple* göra det) för att slippa att integrera den, beräkna sedan realdelen och motiverar att den är jämn, då är $f_\Omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\Omega \mathrm{Re}\left(\hat{f}(\omega)e^{j\omega x}\right) d\omega$.

Till uppgift 2

Följ ex4, där finns alla nödvändiga tips.

a) Glöm ej att kolla att $grad(nämnare) \geq grad(täljare)$!

e) Sinussvaret skall du kunna (skall ej beräknas med Fouriertransform!).

f) Här är $\hat{h}(\omega) = H(j\omega)$ (varför?, enklare än mitt ex. sid. 11). Glöm ej *evalc* för att kunna rita!

Till uppgift 3

För beräkning av *z*-transform och invers *z*-transform behöver du inte ladda in något. Den diskreta enhetspulsen i punkten N, dvs. $\delta_N[n] = \delta[n-N]$, fås med $charfcn[N]$ (characteristic function of $\{N\}$), enhetssteget är *Heaviside*, men skapa helst själv dessa funktioner så att *maple* ritar dem även i origo, t.ex. så här: $puls := n -> piecewise(n = 0,1)$ och $steg := n -> piecewise(n >= 0,1)$. Tänk på att *maple* bara räknar med ensidig *z*-transform, du måste alltså lägga till faktorn $\theta[n]$! Skapa en .*m*-fil som ritar diskreta signaler så som du tycker bäst, se ex.5a. Försök att förenkla svaren (*h*, sinussvar…), pröva med *evalc*, *combine*, *convert*(…,*radical*), *convert*(…,*sincos*), *simplify*, mm. Om inget hjälper ta *evalf*. Se *maple*-ex!

a) Visa att polerna ligger innanför enhetscirkeln, rita även!
b) Rätt (?) impulssvar är $h[n] = \left(\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n} \right)\theta[n]$.

Kommentera (de resultat du får av *maple*)!

ANMÄRKNINGAR:

1) I ex1 ser vi hur bra F-serien approximerar periodiska f även då f innehåller impulser. Kolla själv med t. ex. impulståget $u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m)$ som har Fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2n\pi t}$. Rita delsummorna $\sum_{n=-N}^{N} e^{jn\Omega t} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\Omega t}{\sin\frac{\Omega}{2}t}$ för olika N $(-1.3 < t < 6.3)$. Ta minst 1500 *numpoints*.

2) *Fibonacci*-talen finns i *maple* i kombinatorik-paketet som laddas in med *with*(*combinat*); kolla t.ex. $F_0 = 1, F_1 = 2, F_{39} = 102334155$ som fås som >*combinat*[*fibonacci*](40); observera att *maple* börjar numreringen med 1. Titta vad snabbt de växer:
F_{299} = fibonacci(300);
222232244629420445529739893461909967206666939096499764990979600

3) Även differensekvationer (rekurrensekvationer) kan enkelt lösas med *maple*, se ex5a. Och precis som för differentialekvationer (*odeplot*) kan lösningen ritas (med *REplot*), då måste *LREtools* -paketet laddas in (se ex5b). På sid.5 finns detta exempel löst med MATLAB.

4) I ex6 får du ett exempel på "utveckling i *Legendre*-polynom": Legendre-polynom finns i *maple*: ladda in paketet ”ortogonala polynom” (*with*(*orthopoly*)), skriv sedan bara *P*(*n*,*x*), då får du Legendrepolynomet av grad *n* i variabeln *x*. Observera att utvecklingen m.a.p. egenfunktionerna (ON-systemet) *P*(*n*,*x*) ger en mycket bättre (snabbare) approximation än t.ex. utveckling i Taylorpolynom, men f.f.a. kan ju även icke deriverbara funktioner som t.ex. $|x|$, $|\sin(x)|, \sin(x)\theta(x), \cos(x)\theta(x), \mathrm{sgn}(x) \ldots$.utvecklas. Lös själv t.ex. följande uppgift (se tenta 96-08-20, uppg. 3, som du har lösningen till):
Beräkna ett polynom P av grad högst 7 så att felet $\int_{-1}^{1} (P(x) - x^2\sin(\pi x))^2 dx$ blir minimalt. Rita $P(x)$, $x^2\sin(\pi x)$ och Mclaurinpolynomet av grad 7 till $x^2\sin(\pi x)$ för $|x| \le 1$ i samma diagram, så att man ser bra skillnaden mellan dem [kom ihåg Taylorutvecklingen (*taylor*(…)), polynomet (som kan ritas) får du sedan med *convert*].

LYCKA TILL !

Bernhard

MATLAB-EXEMPEL

Vi betraktar (det hemska) filtret från exemplet 5 (*maple*-ex):
filtret har tillståndsekvationen

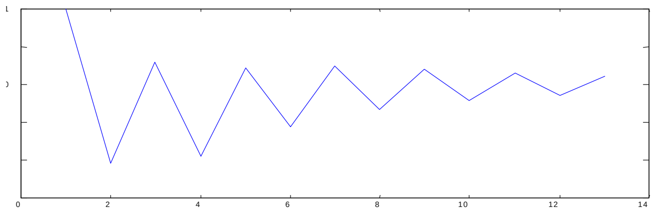
$$432y[n]-216y[n-1]-180y[n-2]+166y[n-3]-58y[n-4]+10y[n-5]=$$
$$=432x[n]+\left(72\sqrt{3}-792\right)x[n-1]+\left(192-12\sqrt{3}\right)x[n-2]-\left(48+42\sqrt{3}\right)x[n-3]+\left(15\sqrt{3}-8\right)x[n-4]:$$

Skriv in koefficienterna framför y (polynomet P) som vektor A, koefficienterna framför x (polynomet Q) som vektor B och insignalen x som vektor X, då fås lösningen Y med >Y = *filter*(B,A,X). Y kan sedan plottas (med *stem* (med eller utan '*filled*'), som vanlig "linje-graf", som punkter, eller som lodräta sträckor med *bar*). Vi vill beräkna impulssvaret för n = 0…12, stoppar alltså in vektorn X = [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]:

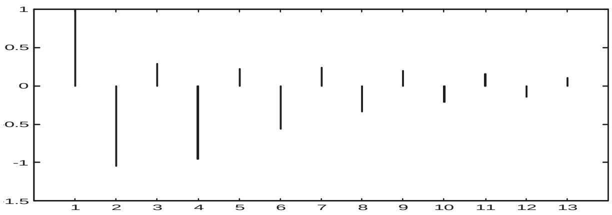
```
A=[432 -216 -180 166 -58 10];
B=[432 72*sqrt(3)-792 192-12*sqrt(3) -48-42*sqrt(3) -8+15*sqrt(3) 0];
X=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
Y=filter(B,A,X)
Y =
  Columns 1 through 7
    1.0000    -1.0447     0.2907    -0.9537     0.2216    -0.5617     0.2411
  Columns 8 through 13
   -0.3334     0.2015    -0.2114     0.1517    -0.1400     0.1092
```

```
plot(Y)
```

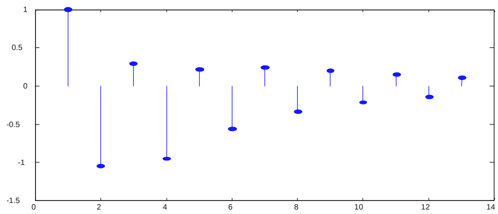
Nå, det känns ju igen från mapleexemplet:



Eller vi ritar det "diskret":
med `bar(Y,0.01)` :

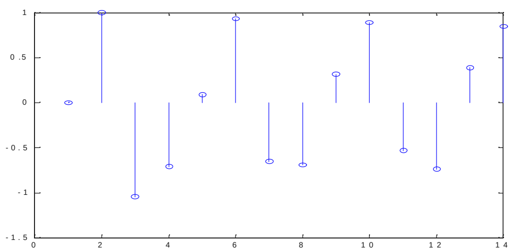


eller med `stem(Y,'filled')` :



Utsignalen till t.ex. $x[n]=\sin\frac{n\pi}{2}\theta[n]$ fås med

```
t=0:1:13;
X2=sin(pi*t/2);
Y2=filter(B,A,X2);
stem(Y2)
```



Anm: Du kan ange för vilka n MATLAB skall rita (men obs, måste vara samma längd):
`stem(0:12,Y)` eller `bar([1:1:13],Y,0.1)`.