

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, transformer, TMA980 och TMV070
2004-08-17, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon: Martin Adiels, tel. 073-9779268.

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

=====

1. Ett tidskontinuerligt LTI-filter F har impulssvaret $h(t) = 2(t - \sin t)e^{-t}\theta(t)$.
 - a) Visa att filtret är stabilt, ange filtrets tillståndsekvation och bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (5p)
 - b) Bestäm svaret på $\cos(t)$. (3p)
 - c) Bestäm en insignal som ger utsignalen $e^{-|t|}$. (4p)
 - d) Visa att $E(F(x)) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x)$. (2p)

2. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a(t-x))\sin(bx)}{x(t-x)} dx$ där $0 < a < b$. (4p)

3. Ett tidsdiskret LTI-filter F har stegsvaret $F(\theta)[n] = \left(4 - \frac{3+(-1)^n}{2^n}\right)\theta[n]$.
 - a) Bestäm filtrets impulssvar och ange filtrets tillståndsekvation. (6p)
 - b) Motivera varför filtret är kausalt och stabilt och ange filtrets amplitudkaraktistik. (4p)
 - c) Bestäm svaret på $\cos \frac{n\pi}{2}$. (3p)
 - d) Bestäm svaret på $\cos \frac{n\pi}{2} \theta[n]$. (4p)

4. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, & 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ u(0, y) = u(2, y) = u(x, 0) = 0, & u(x, 2) = \pi \end{cases}$$
 (6p)

5.
 - a) Definiera "distribution". (2p)
 - b) Visa att för ett stabilt tidsdiskret LTI-filter F med impulssvaret h gäller att $F(e^{j\alpha n}) = H(e^{j\alpha})e^{j\alpha n}$. (3p)
 - c) Visa att ett tidskontinuerligt LTI-filter är ett faltningsfilter. (4p)

BB

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, transformer, TMA980 och TMV070**2004-04-14, kl. 14.15-18.15****Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:** Christoffer Cromvik, tel. 0739-779268.**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

1. Ett tidskontinuerligt LTI-filter F har frekvensöverföringsfunktionen $\frac{2j\omega}{(1+j\omega)^3}$.
- Bestäm filtrets impulssvar. (4p)
 - Visa att filtret är kausalt och stabilt och ange filtrets tillståndsekvation. (3p)
 - Bestäm svaret på $\sin(t)$. (3p)
 - Bestäm $y(0)$ då $y(t)$ är svaret på $\frac{\sin t}{t}$. (3p)
 - Visa att $E(F(x)) \leq \frac{16}{27} E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x)$. (3p)
2. Bestäm en lösning till ekvationen $2y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} y(t-\tau) d\tau = 2|t|e^{-|t|}$. (4p)
3. Ett tidsdiskret LTI-filter har impulssvaret $h[n] = \frac{1}{2^n} \theta[n]$.
- Motivera varför filtret är kausalt och stabilt och ange filtrets tillståndsekvation. (3p)
 - Bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (3p)
 - Bestäm utsignalen då insignalen är $h[n]$. (3p)
 - Bestäm utsignalen då insignalen är $\cos \frac{n\pi}{3}$ (3p), resp. $\cos \frac{n\pi}{3} \theta[n]$ (4p). (7p)
[om du räknat rätt så upptäcker du något anmärkningsvärt, nämligen?]
4. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt}, & 0 < x < 2, 0 < t \\ u(0,t) = u_x(2,t) = u'_t(x,0) = 0, & u(x,0) = \pi \end{cases}$$
. (7p)
5. a) Visa att $\theta' = \delta$. (3p)
- b) Visa $f * g \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} \hat{f} \cdot \hat{g}$. (4p)

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2001-08-21, kl. 8.45-12.45

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon: Rolf Liljendal, tel. 0740-459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
- Ett kausalt tidskontinuerligt filter F har tillståndsekvationen $y'' + 2y' + y = 2x'$.

 - Motivera varför F är ett stabilt LTI-filter.
 Ange även F 's impulssvar och F 's amplitudkaraktistik. (5p)
 - Visa att $E(F(x)) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$. (3p)
 - Bestäm $F(\sin(t))$. (2p)
 - Bestäm $F(\sin(t)\theta(t))$. (3p)
 - Bestäm $F((e^t\theta(-t)) * (e^t\theta(-t)))$. (3p)
 - Funktionen f har perioden 2π och $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$.

 - Utveckla f' i Fourierserie. (4p)
 - Bestäm en periodisk partikulärlösning till $y'' + 2y' + y = 2f''$. [uppg.11] (3p)
 - Beräkna $\left(\frac{a^n}{n!} \theta[n]\right) * \left(\frac{b^n}{n!} \theta[n]\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$. (3p)
 - I det tidsdiskreta filtret F bildas utsignalens värde som det aritmetiska medelvärdet av insignalens tre senaste värden, dvs.
 $F : x[n] \mapsto y[n] = \frac{1}{3}(x[n-2] + x[n-1] + x[n])$.

 - Motivera varför F är ett kausalt, stabilt LTI-filter.
 Ange även F 's impulssvar och F 's amplitudkaraktistik. (4p)
 - Bestäm $F(\sin(\frac{n\pi}{3}))$. (1p)
 - Bestäm $F(\sin(\frac{n\pi}{3})\theta[n])$. (2p)
 - Bestäm en insignal som ger utsignalen $7 \cdot 2^n \theta[n] - 3\delta[n] - 2\delta[n-1]$. (3p)
 - Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} & \text{för } 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{för } t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u'_t(x,0) = 1 & \text{för } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$
 (6p)
 - Definiera "distribution" och visa att $\delta \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} 1$. (4p)
 - Visa $e^{j\Omega t} f(t) \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} \hat{f}(\omega - \Omega)$ ($\Omega \in \mathbb{R}$). (2p)
 - Visa att $x[n-N] \stackrel{\text{z-transform}}{\supset} z^{-N} X(z)$ ($N \in \mathbb{Z}$) för diskreta signaler x . (2p)

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2000-12-15, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon: Martin Adiels, tel. 0740-459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

=====

1. Ett tidskontinuerligt LTI-filter har stegsvaret $J(t) = e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) \theta(t)$.
 - a) Bestäm filtrets impulssvar, motivera varför filtret är kausalt och stabilt, ange filtrets tillståndsekvation och bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (6p)
 - b) Bestäm svaret på $\sin(\sqrt{2}t)$. (3p)
 - c) Visa att $E(y) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ och y är svaret på x . (2p)
2. Visa att ekvationen $y(t) + \int_0^{\infty} y'(t-\tau) e^{-\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 y'(t-\tau) e^{\tau} d\tau + e^{-|t|}$ är en faltningsekvation $y * k = f$ och bestäm en lösning y . (6p)
3. Ett kausalt tidsdiskret filter har tillståndsekvationen $4y[n] - y[n-2] = 3x[n-1] + 2x[n-2]$.
 - a) Visa att filtret är stabilt. (5p)
 - b) Bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (2p)
 - c) Bestäm utsignalen då insignalen är $x[n] = \sin \frac{n\pi}{2}$. (3p)
 - d) Bestäm utsignalen då insignalen är $x[n] = (-1)^n (3 - (\frac{2}{3})^n) \theta[n]$. (4p)
4. Lös problemet $\begin{cases} y[n+2] - 2y[n+1] + 2y[n] = 0, n \geq 0, \\ y[n] = 0, n < 0, y[0] = y[1] = 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$. (4p)
5. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0 \\ u'_y(x, 1) = \delta(x - \frac{1}{2}) \end{cases}$. (6p)
6.
 - a) Visa att $\theta' = \delta$. (3p)
 - b) Visa att för ett stabilt tidskontinuerligt LTI-filter $\mathcal{F}$ med impulssvaret h gäller att $\mathcal{F}(e^{j\alpha t}) = \hat{h}(\alpha) e^{j\alpha t}$. (3p)
 - c) Visa att $\sin(bt) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} \frac{b}{s^2 + b^2}$. (3p)

Tentamen i matematiska metoder, fk, delB, TMA980, 1999-08-17, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon:

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !

=====

1. a) Beräkna $(\cosh(t)\theta(t)) * (\cos(t)\theta(t))$. (3p)
b) Beräkna $(a^n\theta[n]) * (b^n\theta[n])$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Svaret skall ges utan Σ -tecken. (3p)

2. Ett LTI-filter har amplitudkaraktistiken $A(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$

och faskarakteristiken $\Phi(\omega) = -2 \arctan \omega$.

- a) Bestäm filtrets impulssvar och visa att filtret är kausalt och stabilt.

Ange filtrets tillståndsekvation.

(6p)

- b) Bestäm svaret på $\cos t$.

(2p)

- c) Bestäm svaret på $\cos(t)\theta(t)$.

(4p)

- d) Bestäm svaret på $(1+t)e^t\theta(-t)$.

(4p)

3. Ett diskret LTI-filter har impulssvaret $h[n] = \left(\frac{-1}{3}\right)^n \theta[n]$.

- a) Visa att filtret är kausalt och stabilt. Ange filtrets tillståndsekvation.

(3p)

- b) Bestäm svaret på $\cos \frac{n\pi}{2}$.

(3p)

- c) Bestäm svaret på $\cos(\frac{n\pi}{2})\theta[n]$.

(5p)

4. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} + u'_t, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = 0, & u'_t(x,0) = x \end{cases}$$

(7p)

5. a) Visa $\delta \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} 1$.

(3p)

- b) Härled Plancherels formler.

(4p)

- c) Visa $tf(t) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} -F'(s)$.

(2p)

- d) Vad menas med att ett filter är tidsinvariant?

(1p)

CTH&GU matematiska institutionen**Tentamensskrivning i Fourieranalys för E2, 1996-08-27, kl. 8.45-12.45****Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, skall lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej dosa.**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !!!

=====

1. Ett kausalt filter har tillståndsekvationen $y' + a y = b x' + c x$
 $(a, b, c \text{ komplexa tal}).$
 - a) För vilka komplexa tal a, b, c är filtret stabilt? (3p)
Låt nu $a = \frac{1}{2}, b = 3, c = -\frac{3}{2}$:
 - b) Bestäm stegsvaret. (2p)
 - c) Bestäm en insignal som ger utsignalen $\sin \frac{t}{2}$. (2p)
 - d) Bestäm svaret på $\sin t$ (3p) och på $\sin t \theta(t)$ (4p). (7p)
 - e) Bestäm svaret på $e^t \theta(-t)$, på $e^{-t} \theta(t)$ och på $e^{-|t|}$ (6p).
Bestäm dessutom Ω så att hälften av den totala energin av utsignalen till $e^t \theta(-t)$ ligger i frekvensbandet $|\omega| \leq \Omega$ (3p). (9p)
2. Lös värmeledningsproblemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u'_t & \text{för } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u'_x(0, t) = u'_x(\pi, t) & \text{för } t \geq 0 \\ u(x, 0) = 4 \sin^4 x & \text{för } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$
 (7p)
3. Bestäm det polynom av grad högst 4 som bäst approximerar funktionen $\sinh(x)$ i $L_2(-1, 1)$. (6p)
4. Beräkna $\frac{1}{1+t^2} * \arctan t$. (4p)
5. Motivera Fouriers integralsats genom att utgå från en Fourierserie vars period går mot oändligheten. (4p)
6.
 - a) Definiera "distribution". (1p)
 - b) Visa $\theta(t) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} \frac{1}{s}$. (2p)
 - c) Visa $\theta(t) \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$. (3p)

mat. met. E2, fk, del B, gamla tentor, svar (04)**04-08-17**

- 1a) $A(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)\sqrt{4+\omega^4}}$, $((D+1)^4 + (D+1)^2)y = 2x$ b) $e^{-t}(\cos t + \sin t)\theta(t)$
 c) $10e^t\theta(-t) - 8\delta(t) - 4\delta'(t)\delta''(t)$ 2) $\frac{\pi \sin(at)}{t}$ 3a) $h[n] = 3(2^{-n} - (-2)^{-n})\theta[n]$,
 $4y[n] - y[n-2] = 2x[n-1]$ b) $\frac{12}{\sqrt{17-8\cos 2\alpha}}$ c) $\frac{12}{5}\sin \frac{n\pi}{2}$ d) $(\frac{12}{5}\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{3}{5}(2^{-n} - (-2)^n))\theta[n]$
 4) $u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\sinh((2k+1)\pi)} \sinh((k + \frac{1}{2})\pi y) \sin((k + \frac{1}{2})\pi x)$

04-04-14

- 1a) $(2t - t^2)e^{-t}\theta(t)$ b) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 2x'$ c) $\frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$ d) $y(0) = \frac{1}{2}$
 2) $y(t) = -|t| - 2e^{-|t|}$ 3a) $2y[n] - y[n-1] = 2x[n]$ b) $A(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5-4\cos \alpha}}$ c) $\frac{n+2}{2^n}\theta[n]$
 d) $\cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \frac{n\pi}{3}$ resp. $(\cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \frac{n\pi}{3})\theta[n]$ (inga transienter!)
 4) $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2n+1} \cos(\frac{(2n+1)\pi}{4}t) \sin(\frac{(2n+1)\pi}{4}x)$

01-04-18

- 1a) ja b) $-\frac{1}{5}(\sin t + 3\cos t)$ c) $2t^3e^{-t}\theta(t)$ 2) $f'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) - \delta(t-3)$, $-2 < t < 4$,
 $f'(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \sin((2k+1)\frac{\pi}{4})\sin((2k+1)\frac{\pi}{4}t)$, $f(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\sin((2k+1)\frac{\pi}{4})}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\frac{\pi}{4}t)$ 3) $e^{-2t}\sin t\theta(t)$
 4a) $h[n] = 16^{-m}$ då $n = 4m+1$, $m \geq 1$, $h[n] = 0$ annars b) $y[n-4] - 16y[n] = -16x[n-2]$,
 $A(\alpha) = \frac{16}{\sqrt{257-32\cos 4\alpha}}$ c) $\frac{16}{17}\sin \frac{n\pi}{4}$ 5) $a[n] = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin \frac{n\pi}{3}\theta[n]$ 6) $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t} \cos(n\pi x)$

00-12-15

- 1a) $h(t) = \delta(t) - (2e^{-2t}\cos \sqrt{2}t + \sqrt{2}e^{-2t}\sin \sqrt{2}t)\theta(t)$, $A(\omega) = |\omega|\sqrt{\frac{\omega^2+4}{\omega^4-8\omega^2+36}}$
 b) $\frac{1}{6}\sin \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos \sqrt{2}t$ 2) $y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{\sqrt{3}}}$ 3b) $\sqrt{\frac{13+12\cos \alpha}{17-8\cos 2\alpha}}$ c) $-\frac{1}{5}(2\sin \frac{n\pi}{2} + 3\cos \frac{n\pi}{2})$
 d) $(2^{-n} - (-1)^n)\theta[n]$ 4) $(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}\theta[n]$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(1+2n)\pi \cosh((1+2n)\pi)} \sinh((1+2n)\pi y) \sin((1+2n)\pi x)$

99-08-17

- 1a) $\frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)\theta(t)$ b) $(n+1)a^n\theta[n]$ om $a = b$, $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\theta[n]$ om $a \neq b$
 2a) $h(t) = 2te^{-t}\theta(t)$, tillst.ekv: $y'' + 2y' + y = 2x$ b) $\sin t$ c) $(\sin t - te^{-t})\theta(t)$ d) $\frac{1}{2}te^{-|t|}$
 3a) $y[n-1] + 3y[n] = 3x[n]$ b) $\frac{1}{10}(9\cos \frac{n\pi}{2} - 3\sin \frac{n\pi}{2})$ c) $\frac{1}{10}(9\cos \frac{n\pi}{2} - 3\sin \frac{n\pi}{2} + (-\frac{1}{3})^n)\theta[n]$
 4) $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}e^{-\frac{t}{2}}}{n\sqrt{4n^2-1}} \sin(\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}t) \sin(nx)$

Tentamen Fourieranalys för E2, 96-08-27, lösningar

Uppgift 1

$x = \delta$ ger $h' + ah = b\delta' + c\delta$, Laplacetransformation ger $F : s$ överföringsfunktion $H(s) = \frac{bs+c}{s+a}$.

a) F är stabilt, om $\operatorname{Re}(-a) < 0$ (a, b godt), eller om $c = ba$ (a, b godt.).

För $a = \frac{1}{2}, b = 3, c = \frac{-3}{2}$ är $H(s) = 3 \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}$ och $\hat{h}(\omega) = 3 \frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}}$, alltså:

$$b) F(\theta) \supset 3 \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{s} = 3 \left(\frac{2}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{s} \right) \subset \underline{3(2e^{-\frac{t}{2}} - 1)\theta(t)}.$$

c) Sätt in $y = \sin \frac{t}{2}$ i F 's tillståndsekvation $y' + \frac{1}{2}y = 3(x' - \frac{1}{2}x)$, så får du $\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} = 3(x' - \frac{1}{2}x)$ som satisfieras av $x(t) = -\frac{1}{3} \cos \frac{t}{2}$.

$$d) F(\sin t) = |\hat{h}(1)| \sin(t + \arg \hat{h}(1)) = \left[\hat{h}(1) = 3 \frac{j-\frac{1}{2}}{j+\frac{1}{2}} \Rightarrow |\hat{h}(1)| = 3 \text{ och } \arg \hat{h}(1) = \arg\left(-(\frac{1}{2} - j)^2\right) = \arg\left(\frac{3}{4} + j\right) = \arctan \frac{4}{3} \right] = 3 \sin\left(t + \arctan \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{5}(3 \sin t + 4 \cos t).$$

$$F(\sin t \theta(t)) \supset 3 \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+s^2} = \frac{3}{5} \left(-\frac{4}{s+\frac{1}{2}} + \frac{4s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1} \right) \subset \underline{\frac{3}{5}(3 \sin t + 4 \cos t - 4e^{-\frac{t}{2}})\theta(t)}.$$

$$e) F(e^t \theta(-t)) \supset 3 \frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-j\omega} = \frac{-2}{j\omega+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-j\omega} = -2 \frac{2}{1+j(2\omega)} + \frac{1}{1-j\omega} \subset \underline{-2e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t \theta(-t)}.$$

$$F(e^{-t} \theta(t)) \supset 3 \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{s+1} = 3 \left(\frac{-2}{s+\frac{1}{2}} + \frac{3}{s+1} \right) \subset \underline{(-6e^{-\frac{t}{2}} + 9e^{-t})\theta(t)}.$$
 Och det ger nu:

$$F(e^{-|t|}) = F(e^t \theta(-t) + e^{-t} \theta(t)) = \underline{(9e^{-t} - 8e^{-\frac{t}{2}})\theta(t) + e^t \theta(-t)}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Anm: Det sista får du även direkt, men jobbigare (?):} \\ F(e^{-|t|}) \supset 3 \frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{-8}{j\omega+\frac{1}{2}} - \frac{8j\omega}{\omega^2+1} + \frac{10}{\omega^2+1} \subset \underline{-8e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + 5e^{-|t|} + 4e^{-|t|} \operatorname{sgn} t} \end{array} \right].$$

$y(t) = F(e^t \theta(t))$ har den totala energin

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 3 \frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\infty} 9 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{9}{\pi} [\arctan \omega]_0^{\infty} =$$

$$\frac{9}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}. \text{ I bandet } |\omega| \leq \Omega \text{ ligger energin } E_{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{9}{1+\omega^2} d\omega = \frac{9}{\pi} [\arctan \omega]_0^{\Omega} = \frac{9}{\pi} \arctan \Omega.$$

Nu skall $E_{\Omega} = \frac{1}{2}E$, dvs. $\arctan \Omega = \frac{\pi}{4}$, alltså $\underline{\Omega = 1}$.

svar: a) $-\operatorname{Re} a < 0$, b, c godt eller $c = ab$, a, b godt.

$$b) 3(2e^{-\frac{t}{2}} - 1)\theta(t) \quad c) -\frac{1}{3} \cos \frac{t}{2}$$

$$d) \frac{3}{5}(3 \sin t + 4 \cos t) \text{ resp. } \frac{3}{5}(3 \sin t + 4 \cos t - 4e^{-\frac{t}{2}})\theta(t)$$

$$e) -2e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t \theta(-t) \text{ resp. } (-6e^{-\frac{t}{2}} + 9e^{-t})\theta(t) \text{ resp. } 9e^{-t} - 8e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t \theta(-t), \Omega = 1$$

Uppgift 2

Ansättningen $u(x, t) = X(x)T(t)$ ger $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} \stackrel{!}{=} \lambda$, för X är det ett S-L-problem:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \text{ med } \lambda \leq 0. \text{ Till } \lambda = 0 \text{ hör egenlösningen } X_0(x) = c.$$

Till $\lambda < 0$ hör lösningarna $X_{\lambda}(x) = a \cos \sqrt{-\lambda} x + b \sin \sqrt{-\lambda} x$.

$$X'_{\lambda}(0) = 0 \Rightarrow b = 0, X'_{\lambda}(\pi) = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{-\lambda} \pi = 0 \Rightarrow \lambda_k = -k^2, \text{ alltså:}$$

$$\lambda_k = -k^2, X_k(x) = \cos kx, k = 0, 1, 2, \dots$$

Till dessa λ_k har ekv. $T' = \lambda_k T$ lösningarna $T_k(t) = e^{\lambda_k t} = e^{-k^2 t}$, alltså är

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx e^{-k^2 t}.$$

$$\text{För } t = 0 \text{ skall } u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx = 4 \sin^4 x =$$

$$= (1 - \cos 2x)^2 = 1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) = \frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x, \text{ dvs}$$

$$c_0 = \frac{3}{2}, c_2 = -2, c_4 = \frac{1}{2} \text{ och } c_k = 0 \text{ för } k \notin \{0, 2, 4\}.$$

$$\text{svar: } \boxed{u(x, t) = \frac{3}{2} - 2e^{-4t} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{-16t} \cos 4x}$$

Uppgift 3

$$P(x) = \sum_{k=1}^4 c_k P_k(x) \text{ där } P_k(x) \text{ är Legendrepolyinom och } c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \sinh x P_k(x) dx.$$

$$c_0 = c_2 = c_4 = 0, \text{ ty } \sinh x \text{ är udda och } P_0, P_2, P_4 \text{ är jämna.}$$

$$\text{Eftersom } P_1, P_2 \text{ är udda så är } c_1 = 3 \int_0^1 x \sinh x dx = 3 [x \cosh x - \sinh x]_0^1 =$$

$$= 3 \cosh 1 - 3 \sinh 1 \text{ och } c_3 = 7 \int_0^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \sinh x dx = [\text{part.int}] =$$

$$= \frac{7}{2} [5(x^3 \cosh x - 3x^2 \sinh x + 6x \cosh x - 6 \sinh x) - 3(x \cosh x - \sinh x)]_0^1 =$$

$$= \frac{7}{2} (32 \cosh 1 - 42 \sinh 1).$$

$$\text{Alltså är } P(x) = (3 \cosh 1 - 3 \sinh 1)x + \frac{7}{2} (16 \cosh 1 - 21 \sinh 1)(5x^3 - 3x).$$

$$\text{svar: } \boxed{\left(-65 \cosh 1 + \frac{435}{2} \sinh 1\right)x + \left(280 \cosh 1 - \frac{735}{2} \sinh 1\right)x^3}$$

Anm: Rita $\sinh x$ och $P(x)$ för att se vilken fantastisk approximation det är; felet är

$$\int_{-1}^1 \left(\sinh x - \left(-65 \cosh 1 + \frac{435}{2} \sinh 1\right)x - \left(280 \cosh 1 - \frac{735}{2} \sinh 1\right)x^3 \right)^2 dx = 0.3695 \times 10^{-5} !$$

Uppgift 4

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} * \arctan t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{1+t^2} * \frac{1}{1+t^2} \supset \pi^2 e^{-2|\omega|} = \frac{\pi}{2} \pi 2e^{-|\omega|}$$

$$\left[e^{-|t|} \supset \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \supset \pi e^{-|\omega|} \right] \Rightarrow f'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2} \Rightarrow f(t) = \pi \arctan \frac{t}{2} + c, \text{ eftersom}$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} \cdot \arctan(-\tau) d\tau = 0 \text{ [udda integrand]}, \text{ så är } c = 0.$$

$$\text{svar: } \boxed{\pi \arctan \frac{t}{2}}$$