

Datorlaborationer i matematiska metoder E2, fk, del B (TMA980), ht04

- Laborationen är ej obligatorisk. Den består av tre uppgifter som kan ge en bonuspoäng var vid tentamina i matematiska metoder, fk, del B, 04-12-17, vår 05 och augusti 05.
Uppg. 1 skall göras läsvecka 5, uppg. 2 lv 6, uppg. 3 lv 6/7.
- Laborationen skall lämnas in till mig senast ti, 7/12, kl. 9⁴⁵ (efter föreläsningen).
Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, på blad 1 med maple; blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej.
Laborationen lämnas tillbaka med tentan.

Syfte

Du skall lära dig att utnyttja datorn i denna kurs för att utföra beräkningar och för att visualisera dina resultat och därmed öka förståelsen. Laborationen tar upp:

- Spektral avskärning: hur bra approximerar F-integralen resp. F-serien en funktion?
- Laplace-, Fourier-, z-transformation: beräkning, amplitudspektrum, energi, tillämpning på filter (lösning av begynnelsevärdesproblem, stabilitet, sinustest), samplingsteoremet.
- Ortogonalserier.

Uppgift 1

Denna uppgift behandlar Laplacetransformation och Fouriertransformation. Du skall lära dig att transformera med *maple* och se hur bra den spektrala avskärningen approximerar en funktion (speciellt θ resp. δ).

- Rita den spektrala avskärningen $\theta_{\Omega}(t)$ av $\theta(t)$ för $\Omega = 12\pi$ och för $\Omega = 2000$ i samma diagram ($-1 < t < 1$).
- Rita den spektrala avskärningen $\delta_{\Omega}(t)$ av $\delta(t)$ för $\Omega = 10\pi$ och för $\Omega = 39\pi$ i var sitt diagram ($-2 < t < 2$).
- Laplacetransformera $\left(\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\sinh(2x)}{x}\right)\theta(x)$, inverstransformera $\frac{s^2+s+2}{(s+1)^2(s^2+1)}$.
- Fouriertransformera $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x} e^{-|x|}$, rita $f(x)$ och den spektrala avskärningen $f_{\Omega}(x)$ av $f(x)$ för $\Omega = 3\pi$ i samma diagram ($-3 < x < 3$).

Uppgift 2

Denna uppgift behandlar tidskontinuerliga filter. Du skall öva in begreppen filter, frekvensöverföringsfunktion, amplitudkaraktistik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol), sinussvar (transienter)...

Ett kausalt filter F har tillståndsekvationen $P(D)y = Q(D)x$ med $P(D) = D^4 + 5D^3 + 12D^2 + 16D + 8$ och $Q(D) = \frac{1}{5}(40D + 41)$.

- Bestäm filtrets impulssvaret h och filtrets stegsvar J .
- Är filtret stabilt?
- Rita filtrets amplitudkaraktistik för $|\omega| < 9$ och beskriv filtret.
- Vilket filter fås om man ersätter $Q(D)$ med $Q_1(D) = \frac{1}{40}(40D^4 + 41)$?
- Bestäm svaret på $\sin \frac{t}{\sqrt{2}}$ och på $\sin \frac{t}{\sqrt{2}} \theta(t)$ och rita dessa svar för $-1 < t < 6$ i samma diagram.
- Bestäm $y(t) =$ svaret på $x(t) = e^{-|t|} \cos 2t$ och rita $x(t)$ och $y(t)$ för $-6 < t < 6$ i samma diagram.

Uppgift 3

Denna uppgift behandlar tidsdiskreta filter och z-transform. Du skall öva in begreppen frekvenssvar (sinussvar), amplitudkaraktistik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol).

Ett kausalt diskret LTI-filter har överföringsfunktionen $H(z) = \frac{96z^4 - 260z^3 + 37z^2 - 41z}{144z^4 - 84z^3 - 30z^2 + 33z - 18}$.

- Rita enhetscirkeln och polerna. Är filtret stabilt?
- Beräkna filtrets impulssvar h och rita $h[n]$ för $0 \leq n \leq 11$.
- Rita filtrets amplitudkaraktistik $|H(e^{j\alpha})|$ för $|\alpha| < \pi$ och ange filtrets typ.
- Bestäm svaret på $\sin \frac{n\pi}{4}$ och på $\sin \frac{n\pi}{4} \theta[n]$ och rita dessa svar för $-2 \leq n \leq 19$ i samma diagram.
- Testa samplingsteoremet genom att rita $f(t) = \theta_\pi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi t)$ (uppg. 1a) och den N :te delsumman $\sum_{n=-N}^N f(n) \text{sinc}(\pi(t-n))$ för $N = 7$ i samma diagram ($-3 < t < 7$).

Anvisningar, ledningar, tips

Allmänt

Förbered dig innan du sätter dig vid datorn, skriv ner det du vill göra med datorn. Gå igenom *maple* exemplen först. Försök även att lösa uppgifterna så långt det går för hand (*maple* kontrollräknar). Läs uppgiftstexten noggrant (t.ex. "rita i samma plot" eller "i var sitt plot"), **kommentera** alltid resultatet (dvs. *maples* svar), **svara** på frågorna! Kolla rimligheten av resultaten! Följ anvisningarna! Glöm ej namn/persnr. på varje blad, häfta ihop bladen!

- För beräkning av Laplace- resp. Fourier-transform och deras inversa transformer skall integral-transformations-paketet laddas in (*with(inttrans)*).
- *Maple* kan räkna med δ (= *Dirac*) och θ (= *Heaviside*).
- Litteraturtips: *R.B.Israel: Calculus: The Maple Way* (Addison-Wesley, 1996)

Till uppgift 1

a), b) $\theta_{\Omega}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\Omega t)$, $\delta_{\Omega}(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}$ (föreläsning, BB, ex. 2.3 sid. 5)

c) Se ex2.

d) Följ ex3: för att kunna beräkna (numeriskt) och rita den spektrala avskärningen skall du beräkna imaginärdelen av integranden $\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}$ (med *Im*, *evalc* och *simplify*) och motivera att den är udda (ej trivialt, ~~bevis krävs~~, men låt *maple* göra det) för att slippa att integrera den, beräkna sedan realdelen och motiverar att den är jämn, då är $f_{\Omega}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega} \text{Re}(\hat{f}(\omega)e^{j\omega x}) d\omega$.

Till uppgift 2

Följ ex4, där finns alla nödvändiga tips.

- a)** Glöm ej att kolla att $\text{grad}(\text{nämnare}) \geq \text{grad}(\text{täljare})$!
- e)** Sinussvaret skall du kunna (skall ej beräknas med Fouriertransform!).
- f)** Här är $\hat{h}(\omega) = H(j\omega)$ (varför?, enklare än mitt ex. sid. 11). Glöm ej *evalc* för att kunna rita!

Till uppgift 3

För beräkning av z-transform och invers z-transform behöver du inte ladda in något. Den diskreta enhetspulsen i punkten N , dvs. $\delta_N[n] = \delta[n - N]$, fås med *charfcn[N]* (characteristic function of $\{N\}$), enhetssteget är *Heaviside*, men skapa helst själv dessa funktioner så att *maple* ritar dem även i origo, t.ex. så här: *puls := n -> piecewise(n = 0, 1)* och *steg := n -> piecewise(n >= 0, 1)*. Tänk på att *maple* bara räknar med ensidig z-transform, du måste alltså lägga till faktorn $\theta[n]$! Skapa en *.m*-fil som ritar diskreta signaler så som du tycker bäst, se ex.5a. Försök att förenkla svaren (*h*, sinussvar...), pröva med *evalc*, *combine*, *convert(..., radical)*, *convert(..., sincos)*, *simplify*, mm. Om inget hjälper ta *evalf* och ev. *Re* (realdelen) för plott, men kolla numeriskt att imaginärdelen kan försummas! Se ex5!

- a) Visa att polerna ligger innanför enhetscirkeln, rita även!
- b) Rätt (?) impulssvar är $h[n] = \left(\left(\frac{-2}{3} \right)^n - \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n} \right) \theta[n]$.
- e) Se BB sid.43 ($T = 1$). Prova gärna med olika N ! Se ex5c.

Kommentera (de resultat du får av *maple*)!

ANMÄRKNINGAR:

- 1) I ex1 ser vi hur bra F-serien approximerar periodiska f även då f innehåller impulser. Kolla själv med t.ex. impulståget $u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m)$ som har Fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2n\pi t}$. Rita delsummorna

$$\sum_{n=-N}^N e^{jn\Omega t} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\Omega t}{\sin\frac{\Omega t}{2}} \quad \text{för olika } N \quad (-1.3 < t < 6.3). \quad \text{Ta minst 1500 numpoints.}$$

- 2) *Fibonacci*-talen finns i *maple* i kombinatorik-paketet som laddas in med *with(combinat)*; kolla t.ex. $F_0 = 1, F_1 = 2, F_{39} = 102334155$ som fås som *>combinat[fibonacci](40)*; observera att *maple* börjar numreringen med 1. Titta vad snabbt de växer:
 $F_{299} = \text{fibonacci}(300);$
222232244629420445529739893461909967206666939096499764990979600

- 3) Även differensekvationer (rekurrenskvationer) kan enkelt lösas med *maple*, se ex5a. Och precis som för differentialekvationer (*odeplot*) kan lösningen ritas (med *REplot*), då måste *LREtools* -paketet laddas in (se ex5b). På sid. 5 finns detta exempel löst med MATLAB.

I ex6 får du ett exempel på "utveckling i Legendre-polynom": Legendre-polynom finns i *maple*: ladda in paketet "ortogonala polynom" (*with(orthopoly)*), skriv sedan bara $P(n,x)$, då får du Legendrepolynomet av grad n i variabeln x . Observera att utvecklingen m.a.p. egenfunktionerna (ON-systemet) $P(n,x)$ ger en mycket bättre (snabbare) approximation än t.ex. utveckling i Taylorpolynom, men f.f.a. kan ju även icke deriverbara funktioner som t.ex. $|x|$, $|\sin(x)|$, $\sin(x)\theta(x)$, $\cos(x)\theta(x)$, $\text{sgn}(x)$ utvecklas. Lös själv t.ex. följande uppgift (se tenta 96-08-20, uppg. 3, som du har lösningen till):

Beräkna ett polynom P av grad högst 7 så att felet $\int_{-1}^1 (P(x) - x^2 \sin(\pi x))^2 dx$ blir minimalt. Rita

$P(x)$, $x^2 \sin(\pi x)$ och McLaurinpolynomet av grad 7 till $x^2 \sin(\pi x)$ för $|x| \leq 1$ i samma diagram, så att man ser bra skillnaden mellan dem [kom ihåg Taylorutvecklingen (*taylor(...)*), polynomet (som kan ritas) får du sedan med *convert*].

Lycka till!

Bernhard

MATLAB-EXEMPEL

Vi betraktar (det hemska) filtret från exemplet 5 (*maple-ex*):

filtret har tillståndsekvationen

$$432y[n] - 216y[n-1] - 180y[n-2] + 166y[n-3] - 58y[n-4] + 10y[n-5] = \\ = 432x[n] + (72\sqrt{3} - 792)x[n-1] + (192 - 12\sqrt{3})x[n-2] - (48 + 42\sqrt{3})x[n-3] + (15\sqrt{3} - 8)x[n-4]$$

Skriv in koefficienterna framför y (polynomet P) som vektor A , koefficienterna framför x (polynomet Q) som vektor B och insignalen x som vektor X , då fås lösningen Y med

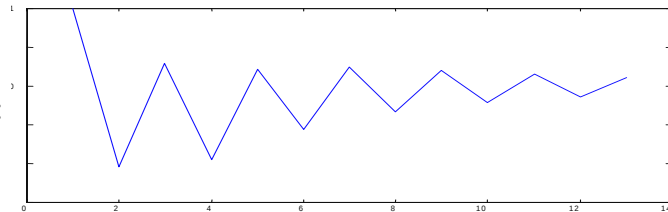
$> Y = \text{filter}(B, A, X)$. Y kan sedan plottas (med *stem* (med eller utan 'filled'), som vanlig "linje-graf", som punkter, eller som lodräta sträckor med *bar*). Vi vill beräkna impulssvaret för $n = 0 \dots 12$, stoppar alltså in vektorn $X = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$:

```
A=[432 -216 -180 166 -58 10];
B=[432 72*sqrt(3)-792 192-12*sqrt(3) -48-42*sqrt(3) -8+15*sqrt(3) 0];
X=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
Y=filter(B,A,X)
```

Y =

```
Columns 1 through 7
    1.0000   -1.0447    0.2907   -0.9537    0.2216   -0.5617    0.2411
Columns 8 through 13
   -0.3334    0.2015   -0.2114    0.1517   -0.1400    0.1092
```

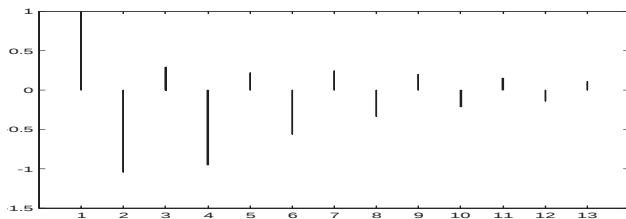
plot(Y)



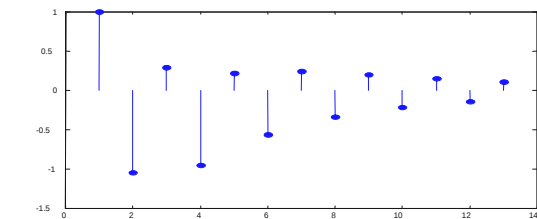
Nå, det känns ju igen från maple-exemplet:

Eller vi ritar det "diskret":

med **bar(Y,0.01)** :

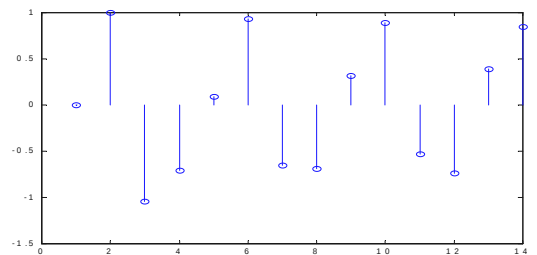


eller med **stem(Y, 'filled')** :



Utsignalen till t.ex. $x[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\theta[n]$ fås med

```
t=0:1:13;
X2=sin(pi*t/2);
Y2=filter(B,A,X2);
stem(Y2)
```



Anm: Du kan ange för vilka n MATLAB skall rita (men obs, måste vara samma längd):

stem(0:12,Y) eller **bar([1:1:13],Y,0.1)**.