

Tentamen transformer (tma980/tmv070), 04-12-17,
lösningar

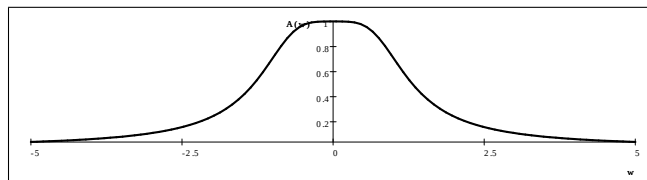
uppgift 1

a) $H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}$, det ger:

Filtrets tillståndsekvation är $y'' + \sqrt{2}y' + y = x$ och filtret är stabilt ty H 's poler $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}j$ (det är $e^{\frac{3\pi}{4}j}$ och $e^{\frac{5\pi}{4}j}$) ligger i $\text{Re } s < 0$ och täljarens grad är mindre än nämnarens.

b) $\hat{h}(\omega) = [\text{filtret är stabilt och kausalt}] = H(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\sqrt{2}\omega}$, alltså är

filtrets amplitudkaraktistik $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 1}}$:



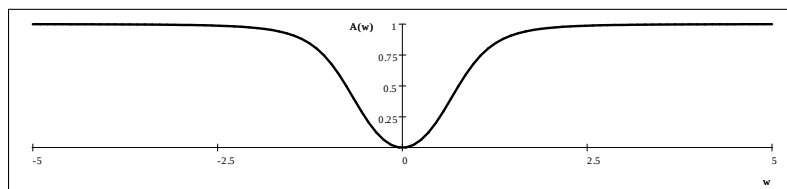
det visar att filtret är ett lågpasfilter.

c) $\cos t \mapsto |\hat{h}(1)| \cos(t + \arg \hat{h}(1)) = [\hat{h}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}j} = -\frac{j}{\sqrt{2}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t$.

d) $\cos t \theta(t) \mapsto (\cos t \theta(t)) * h(t) \stackrel{Lapl}{\supset} \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1+\sqrt{2}s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1+\sqrt{2}s} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right) \subset \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - \sin \frac{t}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \right) \theta(t)$.

e) $E(\mathfrak{F}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) * h(t)|^2 dt = [\text{Plancherel}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(\omega)|^2 |\hat{h}(\omega)|^2 d\omega \leq \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega = E(x)$, ty $|\hat{h}(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^4 + 1} \leq 1$.

f) $H\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{\frac{1}{s^2} + \frac{\sqrt{2}}{s} + 1} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$, det visar att filtret är stabilt (samma poler som i b) och täljaren har samma grad som nämnaren), alltså är filtrets amplitudkaraktistik $\left| \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + 1 + \sqrt{2}\omega j} \right| = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + 1}}$:



det visar att filtret är ett högpasfilter.

svar:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad y'' + \sqrt{2}y' + y = x \\ \text{c)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ \text{d)} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - \sin \frac{t}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \right) \theta(t) \end{array}$$

uppgift 2

$$\text{a)} \quad f(t) = (\operatorname{sgn} t e^{-|t|}) * p(t) \supset \frac{-2j\omega}{1+\omega^2} \cdot \frac{2 \sin 2\omega}{\omega} = \frac{-2}{1+\omega^2} (e^{2j\omega} - e^{-2j\omega}) \subset \underline{e^{-|t-2|} - e^{-|t+2|}}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-4j \sin 2\omega}{1+\omega^2} (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\ [\text{jämn-udda}] &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega \cos \omega t}{1+\omega^2} d\omega, \quad t=1 \quad \text{ger} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \omega \cos \omega}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{8} f(1) = \\ &= \frac{\pi}{8} (e^{-1} - e^{-3}) = \underline{\frac{\pi \sinh 1}{4e^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{svar:} \quad \text{a)} \quad e^{-|t-2|} - e^{-|t+2|} \quad \text{b)} \quad \frac{\pi \sinh 1}{4e^2}$$

uppgift 3

$$\begin{aligned} \text{Filtrets överföringsfunktion är} \quad H(z) &= \frac{7z^{-1}}{6+z^{-1}-2z^{-2}} = \frac{7z}{6(z^2+\frac{1}{6}z-\frac{1}{3})} = \\ \left[z^2 + \frac{1}{6}z - \frac{1}{3} = \left(z + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{49}{144} = \left(z + \frac{1}{12} + \frac{7}{12}\right) \left(z + \frac{1}{12} - \frac{7}{12}\right) \right] &= \\ = z \cdot \frac{\frac{7}{6}}{\left(z+\frac{2}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = z \cdot \left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z+\frac{2}{3}} \right), \text{ det ger nu:} \end{aligned}$$

a) Filtret är kausalt, ty utsignalens värde $y[n]$ beror endast på $x[k]$ för $k \leq n$, eller ty " $a_0 = 6 \neq 0$ ", eller ty $\operatorname{grad}(7z) \leq \operatorname{grad}(6z^2 + z - 2)$; filtret är stabilt ty H 's poler $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ ligger i $|z| < 1$.

$$\text{b)} \quad H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z+\frac{2}{3}} \subset \underline{h[n] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) \theta[n]}.$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \text{Svaret på } \cos \frac{n\pi}{2} \text{ är } |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \arg H(e^{j\frac{\pi}{2}}) \right) &= \\ \left[H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = H(j) = \frac{7j}{-6-2+j} = \frac{7(1-8j)}{65} \right] &= \underline{\frac{7\sqrt{65}}{65} \cos \left(\frac{n\pi}{2} - \arctan 8 \right)}. \end{aligned}$$

svar: $\boxed{\text{b) } h[n] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) \theta[n] \quad \text{c) } \frac{7}{65} \left(\cos \frac{n\pi}{2} + 8 \sin \frac{n\pi}{2}\right)}$

uppgift 4

$$2y[n+2] + y[n] \supset (2z^2 + 1)Y(z) - 2\left(z^2 \cdot 1 + z \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0, \text{ det ger}$$

$$Y(z) = \frac{2z^2 + \sqrt{2}z}{2z^2 + 1} = \frac{(\sqrt{2}z)^2 + \sqrt{2}z}{(\sqrt{2}z)^2 + 1} \subset \boxed{y[n] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2}\right) \theta[n]}.$$

uppgift 5

Ansättningen $u(x, t) = X(x)T(t)$ ger $X''T = XT' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} \stackrel{!}{=} \lambda$, alltså:

I) För X :

(DE) $X'' = \lambda X$, (RV) $X(0) = X'(\pi) = 0$. Detta är ett S-L-problem, alltså finns lösningar $\lambda \leq 0$.

För $\lambda = 0$ har $X'' = 0$ lösningen $X(x) = ax + b$, (RV) ger $b = a = 0$, alltså är 0 ej egenvärde.

För $\lambda < 0$ har $X'' = \lambda X$ lösningen $X(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-\lambda}x)$; $X(0) = 0$ ger $a = 0$ och $X'(\pi) = 0$ ger då $\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$, alltså $\sqrt{-\lambda} = \frac{2n-1}{2}$ och därmed har vi $\lambda_n = -\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$, $X_n(x) = \sin \frac{2n-1}{2}x$, $n \in \mathbb{N}$.

II) För T :

$$T' = \lambda T = -\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 T \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

III) Den allmänna lösningen är då $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, (BV) ger A_n :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{2n-1}{2}x \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2} \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \text{ dvs. } [M_n = \int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx = \frac{\pi}{2}]$$

$$A_n = \frac{1}{M_n} \left\langle \frac{\pi}{2} \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \sin \frac{2n-1}{2}x \right\rangle = \sin\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{2}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

svar: $\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(2n-1)\pi}{4} e^{-\frac{(2n-1)^2}{4}t} \sin \frac{2n-1}{2}x}$