

Observera att T_f är väldefinierad (integralen är konvergent för testfunktioner Φ) och linjär (integral!), δ är linjär ty $\delta(c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2) = c_1\delta(\Phi_1) + c_2\delta(\Phi_2)$.

Distributionerna i ex.1 kallas "reguljära", de står modell för allt vi gör med distributioner: som brukligt (och smart) för linjära operatorer skriver vi även i det allmänna fallet $f(\Phi)$ som "reell skalärprodukt" $\langle f | \Phi \rangle$ och som "integral", ty precis så funkar det: linjär i varje faktor och lättast att räkna med så, reglerna kommer man ihåg enkelt som "integreringsregler" (som måste visas förstås). Från och med nu skriver vi alltså helt obesvärat

$$f(\Phi) = \langle f | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi(t)dt \quad \text{för godt. distributioner, alltså även för } \delta. \text{ Nu några exempel}$$

på hur man skapar nya distributioner, tänk alltid på reguljära distributioner T_f !

1.4 DEFINITION

För en distribution $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ definieras distributionen	("för alla $\Phi \in S$ ")
1) f_T genom $\langle f_T \Phi \rangle = \langle f \Phi_{-T} \rangle$	(kom ihåg: $f_T(t) = f(t-T), T \in \mathbb{R}$).
2) $\tilde{f}$ genom $\langle \tilde{f} \Phi \rangle = \langle f \tilde{\Phi} \rangle$	(vi skriver här $\tilde{f}(t) = f(-t)$).
3) $f(at)$ genom $\langle f(at) \Phi(t) \rangle = \frac{1}{ a } \langle f(t) \Phi(\frac{t}{a}) \rangle$	för $0 \neq a \in \mathbb{R}$.
4) f' genom $\langle f' \Phi \rangle = -\langle f \Phi' \rangle$	(se motiveringen nedan).
5) Ψf genom $\langle \Psi f \Phi \rangle = \langle f \Psi \Phi \rangle$	(för testfkt. Ψ).
6) $\hat{f}$ genom $\langle \hat{f} \Phi \rangle = \langle f \hat{\Phi} \rangle$	(vettigt, ty $\Phi \in S \Leftrightarrow \hat{\Phi} \in S$).

Kolla med reguljära distributioner rimligheten av dessa definitioner, t.ex. för derivatan av en distribution: $\langle f' | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\Phi(t)dt = [\text{part.int.}] = [f(t)\Phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi'(t)dt = 0 - \langle f | \Phi' \rangle$; här ser du igen det fina med våra testfunktioner: $f(t)\Phi(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \pm\infty$!

(5) kan utvidgas till C^∞ -funktioner som ej växer snabbare än en potensfunktion.

Anmärkningsvärt är att alla distributioner, alltså även reguljära som $|x|$ och icke reguljära som x^{-n} , kan deriveras i distributionsmening. Vi sammanställer nu egenskaper för δ :

1.5 SATS (fakta om δ)

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$ ($f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$)	om f är en fkt. som är kontinuerlig i 0.
2) $\delta(x) = \delta(-x)$ och $\delta(x) = 0$ för $x \neq 0$ (som en funktion),	$\delta(ax) = \frac{1}{ a }\delta(x)$ ($a \neq 0$).
3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a)$,	$\int_A^B \delta(x-a)f(x)dx = \begin{cases} f(a), & \text{om } a \in]A, B[\\ 0, & \text{om } a \notin [A, B] \\ \text{odefinierat om } a \in \{A, B\} \end{cases}$

((f(x)δ(x-a) = f(a)δ(x-a)) om f är en funktion som är kontinuerlig i a.

4) För en tempererad distribution f gäller: xf(x) = 0 ⇒ f = cδ för ngt. c ∈ C.

5) θ' = δ. 6) δ'(-x) = -δ(x). 7) f(x)δ'(x) = f(0)δ'(x) - f'(0)δ(x) (f' kont. i 0)

8) δ ⊃ 1, 1 ⊃ 2πδ(ω), sgn(t) ⊃ $\frac{2}{j\omega}$, θ(t) ⊃ $\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$.

1.6 ANMÄRKNING

(1) ger att $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$; detta tillsammans med (2): δ(x) = 0 för x ≠ 0 visar att δ inte är reguljär (ej en funktion).

BEVIS

5) Vi skall visa att för alla testfunktioner Φ gäller ⟨θ'|Φ⟩ = ⟨δ|Φ⟩:

$$\begin{aligned} \langle \theta' | \Phi \rangle &= [\text{definition}] = -\langle \theta | \Phi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \Phi'(x) dx = -\int_0^{\infty} \Phi'(x) dx = -[\Phi(x)]_0^{\infty} = \\ &= [\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0 \text{ ty } \Phi \text{ är testfunktion}] = -0 + \Phi(0) = \langle \delta | \Phi \rangle. \end{aligned} \quad \text{vsv}$$

7) f(0)δ'(x) = (f(0)δ(x))' = (f(x)δ(x))' = f'(x)δ(x) + f(x)δ'(x) = f'(0)δ(x) + f(x)δ'(x).

8) Vi skall visa att för alla testfunktioner Φ gäller ⟨δ̂|Φ⟩ = ⟨1|Φ⟩:

$$\langle \hat{\delta} | \Phi \rangle = [\text{definition}] = \langle \delta | \hat{\Phi} \rangle = \hat{\Phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = \langle 1 | \Phi \rangle. \quad \text{vsv}$$

$$f(t) = \text{sgn}(t) = 2\theta(t) - 1 \Rightarrow f'(t) = 2\delta(t) \supset j\omega \hat{f}(\omega) = 2 \underset{(4)}{\Rightarrow} \hat{f}(\omega) = \frac{2}{j\omega} + c\delta(\omega);$$

eftersom f är udda så är även $\hat{f}$ udda, alltså c = 0.

$\hat{\theta}$ fås analogt eller med omskrivningen $\theta = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn})$. vsv

1.7 ANMÄRKNING

δ beskriver en MONOPOL, -δ' beskriver en DIPOL, ..., (-1)ⁿδ⁽ⁿ⁾ beskriver en 2ⁿ-IPOL i 0. Motivering för en dipol: punktladdningar -q och q med avståndet h har dipolmomentet qh = 1 då q = $\frac{1}{h}$. Låt nu h gå mot 0 så fås formellt (och helt korrekt i distributionsmening): $\lim_{h \rightarrow 0} ((-q)\delta(t) + q\delta(t-h)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\delta(t) + \delta(t-h)}{h} = -\delta'(t)$.

1.8 DEFINITION (konvergensbegreppet för distributioner)

Låt f, f_n ($n \in \mathbb{N}$) vara distributioner. Man säger f_n KONVERGERAR SVAGT MOT f, bet. $f_n \rightarrow f$ (svagt), om för alla $\Phi \in S$ gäller $\langle f_n | \Phi \rangle \rightarrow \langle f | \Phi \rangle$ då $n \rightarrow \infty$.