Datorlaborationer i matematiska metoder E2, fk, del B (TMA980), ht05

- Laborationen är ej obligatorisk. Den består av tre uppgifter som kan ge en bonuspoäng var vid tentamina i matematiska metoder, fk, del B, 05-12-16, vår 06 och augusti 06.
  Uppg. 1 skall göras läsvecka 5, uppg. 2 lv 6, uppg. 3 lv 6/7.
- Laborationen skall lämnas in till mig senast **ti, 6/12**, kl. 9^{45} (efter föreläsningen).
  Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer längst upp på **varje** inlämnat blad, på blad 1 med *maple*; blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej.
  Laborationen lämnas tillbaka med tentan.

Syfte

Du skall lära dig att utnyttja datorn för att utföra beräkningar och för att visualisera dina resultat och därmed öka förståelsen. Laborationen tar upp:

- Spektral avskärning: hur bra approximerar F-integralen resp. F-serien en funktion?
- Laplace-, Fourier-, *z*-transformation: beräkning, amplitudspektrum, energi, tillämpning på filter (lösning av begynnelsevärdesproblem, stabilitet, sinustest), samplingsteoremet.
- Ortogonalserier.

Uppgift 1

Denna uppgift behandlar Laplacetransformation och Fouriertransformation. Du skall lära dig att transformera med *maple* och se hur bra den spektrala avskärningen approximerar en funktion (speciellt θ resp. δ).

a) Rita $\theta(t)$ och dess spektrala avskärning $\theta_\Omega(t)$ för $\Omega = 12\pi$ och för $\Omega = 2000$ i samma diagram $(-1 < t < 1)$.

b) Rita den spektrala avskärningen $\delta_\Omega(t)$ av $\delta(t)$ för $\Omega = 10\pi$ och för $\Omega = 39\pi$ i var sitt diagram $(-2 < t < 2)$.

c) Laplacetransformera $\left(\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\sinh(3x)}{x}\right)\theta(x)$, inverstransformera $\frac{s^2+s+2}{(s+1)^2\left(s^2+1\right)}$.

d) Fouriertransformera $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x} e^{-|x|}$, rita $f(x)$ och dess spektrala avskärning $f_\Omega(x)$ för $\Omega = 3\pi$ i samma diagram $(-3 < x < 3)$.

Uppgift 2

Denna uppgift behandlar tidskontinuerliga filter. Du skall öva in begreppen filter, frekvensöverföringsfunktion, amplitudkarakteristik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol), sinussvar (transienter)...

Ett kausalt filter F har tillståndsekvationen $P(D)y = Q(D)x$ med $P(D) = D^4 + 5D^3 + 12D^2 + 16D + 8$ och $Q(D) = \frac{1}{5}(40D + 41)$.

a) Bestäm filtrets impulssvaret h och filtrets stegsvar J.
b) Är filtret stabilt?
c) Rita filtrets amplitudkarakteristik för $|\omega| < 9$ och beskriv filtret.
d) Vilket filter fås om man ersätter $Q(D)$ med $Q_1(D) = \frac{1}{40}\left(40D^4 + 41\right)$?
e) Bestäm svaret på $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$ och på $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,\theta(t)$ och rita dessa svar för $-1 < t < 6$ i samma diagram.
f) Bestäm $y(t)$ = svaret på $x(t) = e^{-|t|}\cos 2t$ och rita $x(t)$ och $y(t)$ för $-6 < t < 6$ i samma diagram.

Uppgift 3

Denna uppgift behandlar tidsdiskreta filter och *z*-transform. Du skall öva in begreppen frekvenssvar (sinussvar), amplitudkarakteristik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol).

Ett kausalt diskret LTI-filter har överföringsfunktionen $H(z) = \frac{96z^4 - 260z^3 + 37z^2 - 41z}{144z^4 - 84z^3 - 30z^2 + 33z - 18}$.

a) Rita enhetscirkeln och polerna. Är filtret stabilt?
b) Beräkna filtrets impulssvar h och rita $h[n]$ för $0 \le n \le 11$.
c) Rita filtrets amplitudkarakteristik $\left|H\left(e^{j\alpha}\right)\right|$ för $|\alpha| < \pi$ och ange filtrets typ.
d) Bestäm svaret på $\sin\frac{n\pi}{4}$ och på $\sin\frac{n\pi}{4}\,\theta[n]$ och rita dessa svar för $-2 \le n \le 19$ i samma diagram.
e) Testa samplingsteoremet genom att rita $f(t) = \theta_\pi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(\pi t)$ (uppg. 1a) och den N:te delsumman $\sum_{n=-N}^{N} f(n)\,\mathrm{sinc}(\pi(t-n))$ för $N = 7$ i samma diagram $(-3 < t < 7)$.

Anvisningar, ledningar, tips

Allmänt

Förbered dig innan du sätter dig vid datorn, skriv ner det du vill göra med datorn. Gå igenom *maple* exemplen först. Försök även att lösa uppgifterna så långt det går för hand (*maple* kontrollräknar).
Läs uppgiftstexten noggrant (t.ex. "rita i samma plot" eller "i var sitt plot"), **kommentera alltid** resultatet (dvs. *maples* svar), **svara** på frågorna! Kolla rimligheten av resultaten! Följ anvisningarna!
Glöm ej namn/persnr. på varje blad, häfta ihop bladen!

- För beräkning av Laplace- resp. Fourier-transform och deras inversa transformer skall integral-transformations-paketet laddas in (*with*(*inttrans*)).
- *Maple* kan räkna med δ (= *Dirac*) och θ (= *Heaviside*).
- Litteraturtips: *R.B.Israel*: Calculus: The Maple Way (Addison-Wesley,1996)

Till uppgift 1

a), b) $\theta_\Omega(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\Omega t)$, $\delta_\Omega(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}$ (föreläsning, BB, ex. 2.3 sid. 5)

c) Se ex2.

d) Följ ex3: för att kunna beräkna (numeriskt) och rita den spektrala avskärningen skall du beräkna imaginärdelen av integranden $\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}$ (med *Im*, *evalc* och *simplify*) och motivera att den är udda (ej trivialt, bevis krävs, men låt *maple* göra det) för att slippa att integrera den, beräkna sedan realdelen och motiverar att den är jämn, då är $f_\Omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\Omega \mathrm{Re}\left(\hat{f}(\omega)e^{j\omega x}\right) d\omega$.

Till uppgift 2

Följ ex4, där finns alla nödvändiga tips.

a) Glöm ej att kolla att *grad*(*nämnare*)≥ *grad*(*täljare*) !

e) Sinussvaret skall du kunna (skall ej beräknas med Fouriertransform!).

f) Här är $\hat{h}(\omega) = H(j\omega)$ varför?, enklare än mitt ex. sid. 11). Glöm ej *evalc* för att kunna rita!

Till uppgift 3

För beräkning av *z*-transform och invers *z*-transform behöver du inte ladda in något. Den diskreta enhetspulsen i punkten *N*, dvs. $\delta_N[n] = \delta[n-N]$, fås med *charfcn*[*N*] (characteristic function of {*N*}), enhetssteget är *Heaviside*, men skapa helst själv dessa funktioner så att *maple* ritar dem även i origo, t.ex. så här: *puls* := *n*−> *piecewise*(*n* = 0,1) och *steg* := *n*−> *piecewise*(*n* >= 0,1).
Tänk på att *maple* bara räknar med ensidig *z*-transform, du måste alltså lägga till faktorn $\theta[n]$!
Skapa en .*m*-fil som ritar diskreta signaler så som du tycker bäst, se ex.5a. Försök att förenkla svaren (*h*, sinussvar…), pröva med *evalc*, *combine*, *convert*(…,*radical*), *convert*(…,*sincos*), *simplify*, mm. Om inget hjälper ta *evalf* och eventuellt *Re* (realdelen) för plott, men kolla numeriskt att imaginärdelen kan försummas! Se ex5!

a) Visa att polerna ligger innanför enhetscirkeln, rita även!
b) Rätt (?) impulssvar är $h[n] = \left(\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n} \right) \theta[n]$.
e) Se BB sid.43 ($T = 1$). Pröva gärna med olika N! Se ex5c.

Kommentera (de resultat du får av *maple*)!

ANMÄRKNINGAR:

1) I ex1 ser vi hur bra F-serien approximerar periodiska f även då f innehåller impulser. Kolla själv med t.ex. impulståget $u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m)$ som har Fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2n\pi t}$. Rita delsummorna $\sum_{n=-N}^{N} e^{jn\Omega t} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\Omega t}{\sin\frac{\Omega}{2}t}$ för olika N ($-1.3 < t < 6.3$). Ta minst 1500 *numpoints*.

2) *Fibonacci*-talen finns i *maple* i kombinatorik-paketet som laddas in med *with*(*combinat*); kolla t.ex. $F_0 = 1, F_1 = 2, F_{39} = 102334155$ som fås som >*combinat*[*fibonacci*](40); observera att *maple* börjar numreringen med 1. Titta vad snabbt de växer:
F_{299} = fibonacci(300);
222232244629420445529739893461909967206666939096499764990979600

3) Även differensekvationer (rekurrensekvationer) kan enkelt lösas med *maple*, se ex5a. Och precis som för differentialekvationer (*odeplot*) kan lösningen ritas (med *REplot*), då måste *LREtools* -paketet laddas in (se ex5b). På sid. 5 finns detta exempel löst med MATLAB.

I ex6 får du ett exempel på "utveckling i *Legendre*-polynom": Legendre-polynom finns i *maple*: ladda in paketet ”ortogonala polynom” (*with*(*orthopoly*)), skriv sedan bara *P*(*n*,*x*), då får du Legendrepolynomet av grad *n* i variabeln *x*. Observera att utvecklingen m.a.p. egenfunktionerna (ON-systemet) *P*(*n*,*x*) ger en mycket bättre (snabbare) approximation än t.ex. utveckling i Taylorpolynom, men f.f.a. kan ju även icke deriverbara funktioner som t.ex. $|x|$, $|\sin(x)|$, $\sin(x)\theta(x)$, $\cos(x)\theta(x)$, $\operatorname{sgn}(x)$ ….utvecklas. Lös själv t.ex. följande uppgift (se tenta 96-08-20, uppg. 3, som du har lösningen till):

Beräkna ett polynom P av grad högst 7 så att felet $\int_{-1}^{1} \left(P(x) - x^2\sin(\pi x)\right)^2 dx$ blir minimalt. Rita $P(x)$, $x^2\sin(\pi x)$ och Mclaurinpolynomet av grad 7 till $x^2\sin(\pi x)$ för $|x| \le 1$ i samma diagram, så att man ser bra skillnaden mellan dem [kom ihåg Taylorutvecklingen (*taylor*(…)), polynomet (som kan ritas) får du sedan med *convert*].

Lycka till!

Bernhard

MATLAB-EXEMPEL

Vi betraktar (det hemska) filtret från exemplet 5 (*maple*-ex):
filtret har tillståndsekvationen

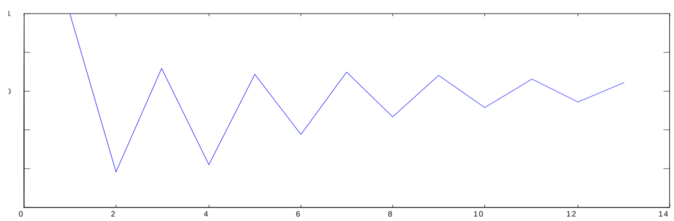
$$432y[n]-216y[n-1]-180y[n-2]+166y[n-3]-58y[n-4]+10y[n-5]=$$
$$=432x[n]+\left(72\sqrt{3}-792\right)x[n-1]+\left(192-12\sqrt{3}\right)x[n-2]-\left(48+42\sqrt{3}\right)x[n-3]+\left(15\sqrt{3}-8\right)x[n-4]$$

Skriv in koefficienterna framför y (polynomet P) som vektor A, koefficienterna framför x (polynomet Q) som vektor B och insignalen x som vektor X, då fås lösningen Y med
>Y = *filter*(B,A,X). Y kan sedan plottas (med *stem* (med eller utan '*filled*'), som vanlig "linje-graf", som punkter, eller som lodräta sträckor med *bar*). Vi vill beräkna impulssvaret för n = 0…12, stoppar alltså in vektorn X = [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]:

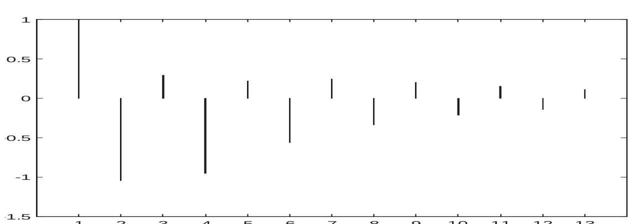
```
A=[432 -216 -180 166 -58 10];
B=[432 72*sqrt(3)-792 192-12*sqrt(3) -48-42*sqrt(3) -8+15*sqrt(3) 0];
X=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
Y=filter(B,A,X)
Y =
  Columns 1 through 7
    1.0000   -1.0447    0.2907   -0.9537    0.2216   -0.5617    0.2411
  Columns 8 through 13
   -0.3334    0.2015   -0.2114    0.1517   -0.1400    0.1092
```

```
plot(Y)
```

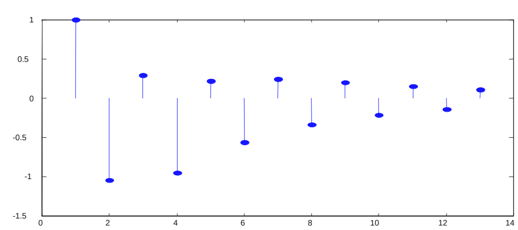
Nå, det känns ju igen från maple-exemplet:



Eller vi ritar det "diskret":
med `bar(Y,0.01)` :

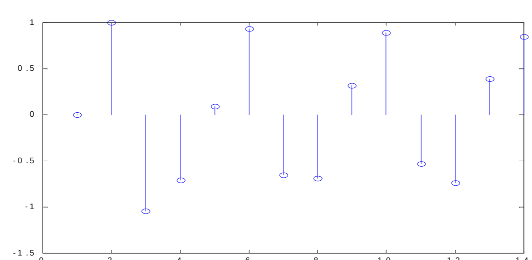


eller med `stem(Y,'filled')` :



Utsignalen till t.ex. $x[n]=\sin\frac{n\pi}{2}\theta[n]$ fås med

```
t=0:1:13;
X2=sin(pi*t/2);
Y2=filter(B,A,X2);
stem(Y2)
```



Anm: Du kan ange för vilka n MATLAB skall rita (men obs, måste vara samma längd):
`stem(0:12,Y)` eller `bar([1:1:13],Y,0.1)`.