Övningstenta transformer (tma980/tmv070) 05-11-19

uppgift 1

$\left((D+2)^4-16\right)y(t)=16\delta'(t)\underset{Laplace}{\Longrightarrow}\left((s+2)^4-16\right)Y(s)=16s$ [alla begynnelsevillkor $=0$] $\Longrightarrow Y(s)=\frac{16s}{(s+2)^4-16}=\frac{16}{(s^2+4s+8)(s+4)}$ $[(s+2)^4-16=$
$=\left((s+2)^2+4\right)\left((s+2)^2-4\right)=\left((s+2)^2+4\right)(s+2+2)(s+2-2)]=$ [partialbråksuppdela, ses direkt!] $=2\left(\frac{1}{s+4}-\frac{s}{s^2+4s+8}\right)=$
$=2\left(\frac{1}{s+2+2}-\frac{s+2}{(s+2)^2+4}+\frac{2}{(s+2)^2+4}\right)\subset \boxed{y(t)=2\left(e^{-2t}+\sin 2t-\cos 2t\right)e^{-2t}\theta(t)}.$

uppgift 2

a) $\widehat{f}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=$ [jämn-udda] $=2\int\limits_0^1\left(t-t^2\right)\cos\omega t dt=$ [part. int., för $\omega\neq 0$] $=2\left(\left[\frac{\left(t-t^2\right)\sin\omega t}{\omega}\right]_0^1-\frac{1}{\omega}\int\limits_0^1(1-2t)\sin\omega t dt\right)=$

$=2\left(0+\frac{1}{\omega}\left(\left[\frac{(1-2t)\cos\omega t}{\omega}\right]_0^1+\frac{2}{\omega}\int\limits_0^1\cos\omega t dt\right)\right)=\frac{2}{\omega}\left(-\frac{\cos\omega t-1}{\omega}+\frac{2\sin\omega}{\omega^2}\right)=$

$=\underline{\frac{2(2\sin\omega-\omega\cos\omega-\omega)}{\omega^3}}$ [gäller även för $\omega=0$, kolla!].

b) $f'(t)\supset j\omega\hat{f}(\omega)\implies f'(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{j\omega 2(2\sin\omega-\omega\cos\omega-\omega)(\cos\omega t+j\sin\omega t)}{\omega^3}d\omega=$

$=\frac{-1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{2(2\sin\omega-\omega\cos\omega-\omega)\sin\omega t}{\omega^2}d\omega$, för $t=\frac{1}{4}$ fås då $f'\left(\frac{1}{4}\right)=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=$

$=\frac{-1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{2(2\sin\omega-\omega\cos\omega-\omega)\sin\frac{\omega}{4}}{\omega^2}d\omega$, alltså $\underline{\int\limits_0^{\infty}\frac{(2\sin\omega-\omega\cos\omega-\omega)\sin\frac{\omega}{4}}{\omega^2}d\omega=-\frac{\pi}{4}}.$

c) Plancherel ger: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt=$ [jämn!] $=2\int\limits_0^1\left(t^4-2t^3+t^2\right)dt=\frac{1}{15}=$

$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4(2\sin\omega-\omega\cos\omega-\omega)^2}{\omega^6}d\omega\implies\underline{\int\limits_0^{\infty}\frac{(2\sin\omega-\omega\cos\omega-\omega)^2}{\omega^6}d\omega=\frac{\pi}{60}}.$

uppgift 3

a) $t * e^{-|t|} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)\, e^{-|\tau|} d\tau = [\text{jämn-udda}] = 2t \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau} d\tau - 0 =$
$= 2t\left[-e^{-\tau}\right]_0^{\infty} = \underline{\underline{2t}}.$

b) $-jt \supset 2\pi\delta'(\omega)$ och $f * g \supset \widehat{f}\widehat{g}$ ger $t * e^{-|t|} \supset j2\pi \frac{2}{1+\omega^2}\delta'(\omega) =$
$= 4\pi j\left(g(0)\,\delta'(\omega) - g'(0)\,\delta(\omega)\right) = 4\pi j\delta'(\omega) \subset \underline{\underline{2t}}$

med $g(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$, $g'(\omega) = \frac{-2\omega}{(1+\omega^2)^2}$;
eller [om du inte kunde formeln $f(x)\,\delta'(x) = f(0)\,\delta'(x) - f'(0)\,\delta(x)$]

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi j}{1+\omega^2} e^{j\omega t}\delta'(\omega)\, d\omega = [\text{part. int.}] =$

$= 2j\left(\left[\frac{e^{j\omega t}}{1+\omega^2}\delta(\omega)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{jte^{j\omega t}\left(1+\omega^2\right) - 2\omega e^{j\omega t}}{(1+\omega^2)^2}\delta(\omega)\, d\omega\right) = 2j\,(0 - jt) = \underline{\underline{2t}}.$