CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, transformer, TMA980 och TMV070
2005-08-16, kl. 14.00-18.00 (i V)

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.
Telefon: Marcus Better, tel. 0762-721860.
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

===

1. Ett kausalt tidskontinuerligt LTI filter F har överföringsfunktionen $H(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+2}$.

a) Visa att F är stabilt och ange en tillståndsekvation för F. (3p)

b) Bestäm F:s stegsvar och med hjälp härav F:s impulssvar. (4p)

c) Bestäm F:s typ. (2p)

d) Bestämm $\mathsf{F}\left(\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right)$ (2p) och $\mathsf{F}\left(\cos\left(\sqrt{2}t\right)\theta(t)\right)$ (3p). (5p)

e) Visa att $E(\mathsf{F}(x))\le E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x)$. (2p)

2. Funktionen f har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)=\dfrac{\cos(\pi\omega)}{\sqrt{1+\omega^4}}$;

beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(t)\,dt$ och $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(x-t)\,dt$. (4p)

3. Ett tidsdiskret LTI filter F har överföringsfunktionen $H(z)=\dfrac{2z}{2z^2-2z+1}$.

a) Visa att F är kausalt och stabilt och ange en tillståndsekvation för F. (4p)

b) Bestäm F : s impulssvar. (3p)

c) Bestäm $\mathsf{F}\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)$. (3p)

4. Beräkna med hjälp av z-transformation a_n $(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ då
$a_0=0,\ a_1=1$ och $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$. (4p)

5. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx}=u'_t\,, & 0<x<2,\ 0<t \\ u'_x(0,t)=u'_x(2,t)=0, & u(x,0)=\delta'(x-1) \end{cases}.$$ (6p)

6. a) Definiera "distribution" och visa att $\theta'=\delta$. (4p)

b) Visa $e^{-at}f(t)\overset{Laplace}{\supset}F(s+a)$ $(a\in\mathbb{R})$. (2p)

c) Visa $x_N=x*\delta_N$ $(N\in\ \ )$ för tidsdiskreta signaler x. (2p)

d) Visa att $x[n-N]\overset{z-transform}{\supset}z^{-N}X(z)$ $(N\in\ \ )$ för tidsdiskreta signaler x. (2p)

BB

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, transformer, TMA980 och TMV070
2005-03-30, kl. 14.00-18.00 (i V)
Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.
Telefon: Tobias Gebäck, tel. 0739-779268.
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.
===

1. Ett kausalt tidskontinuerligt filter F har tillståndsekvationen $8y'' + 6y' + y = x$.

a) Visa att F är ett stabilt LTI-filter och ange dess typ. Bestäm även F : s impulssvar. (6p)

b) Bestäm $\mathsf{F}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$. (3p)

2. Visa genom att enbart använda utdelad formelsamling att $\dfrac{4-t^2}{\left(4+t^2\right)^2} \overset{\text{Fourier}}{\supset} \pi|\omega|e^{-2|\omega|}$ och

beräkna med hjälp härav $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{4-\tau^2}{\left(4+\tau^2\right)^2}\,d\tau$, $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\left(4-t^2\right)\cos(t)}{\left(4+t^2\right)^2}\,dt$ och $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(4-\tau^2\right)^2}{\left(4+\tau^2\right)^4}\,d\tau$. (9p)

3. Ett tidsdiskret F filter har tillståndsekvationen $8y[n] + 6y[n-1] + y[n-2] = x[n]$.

a) Visa att F är ett kausalt och stabilt LTI-filter. (5p)

b) Bestäm F : s impulssvar och F : s amplitudkarakteristik. (4p)

c) Bestäm $\mathsf{F}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$. (3p)

4. Låt $a, b \in \mathbb{R}$; bestäm en sekvens $x[n]$ så att $\begin{cases} x[n] = 0,\ n < 0, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k] = (a+b)^n,\ n \geq 0 \end{cases}$. (4p)

5. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt}\ , \quad 0 < x < 2,\ 0 < t \\ u(0,t) = u(2,t) = u'_t(x,0) = 0,\ u(x,0) = x \end{cases}$. (6p)

6. **a)** Definiera "distribution" och visa att $\hat{1} = 2\pi\delta(\omega)$ (symmetriregeln får ej användas!). (4p)

b) Visa $\cos at \overset{\text{Laplace}}{\supset} \frac{s}{s^2+a^2}$ $(a \in \mathbb{R})$. (3p)

c) Visa att $f' = f * \delta'$ för en tidskontinuerlig signal f. (3p)

BB

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, transformer,TMA980 och TMV070
2004-04-14, kl. 14.15-18.15
Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.
Telefon: Christoffer Cromvik, tel. 0739-779268.
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.
===

1. Ett tidskontinuerligt LTI-filter F har frekvensöverföringsfunktionen $\dfrac{2j\omega}{(1+j\omega)^3}$.

a) Bestäm filtrets impulssvar. (4p)
b) Visa att filtret är kausalt och stabilt och ange filtrets tillståndsekvation. (3p)
c) Bestäm svaret på $\sin(t)$. (3p)
d) Bestäm $y(0)$ då $y(t)$ är svaret på $\frac{\sin t}{t}$. (3p)
e) Visa att $E(\mathsf{F}(x)) \le \frac{16}{27} E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x)$. (3p)

2. Bestäm en lösning till ekvationen $2y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} y(t-\tau)\,d\tau = 2|t|e^{-|t|}$. (4p)

3. Ett tidsdiskret LTI-filter har impulssvaret $h[n] = \frac{1}{2^n}\theta[n]$.

a) Motivera varför filtret är kausalt och stabilt och ange filtrets tillståndsekvation. (3p)
b) Bestäm filtrets amplitudkarakteristik. (3p)
c) Bestäm utsignalen då insignalen är $h[n]$. (3p)
d) Bestäm utsignalen då insignalen är $\cos\frac{n\pi}{3}$ (3p), resp. $\cos\frac{n\pi}{3}\theta[n]$ (4p). (7p)
[om du räknat rätt så upptäcker du något anmärkningsvärt, nämligen?]

4. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt}\ , & 0 < x < 2,\ 0 < t \\ u(0,t) = u'_x(2,t) = u'_t(x,0) = 0, & u(x,0) = \pi \end{cases}$. (7p)

5. a) Visa att $\theta' = \delta$. (3p)
b) Visa $f * g \overset{Fourier}{\supset} \hat{f} \cdot \hat{g}$. (4p)

BB

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2000-12-15, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon: Martin Adiels, tel. 0740-459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

==

1. Ett tidskontinuerligt LTI-filter har stegsvaret $J(t) = e^{-2t}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)\theta(t)$.

a) Bestäm filtrets impulssvar, motivera varför filtret är kausalt och stabilt, ange filtrets tillståndsekvation och bestäm filtrets amplitudkarakteristik. (6p)

b) Bestäm svaret på $\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)$. (3p)

c) Visa att $E(y) \le E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x)$ $\left(= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \right)$ och y är svaret på x. (2p)

2. Visa att ekvationen $y(t) + \int_0^{\infty} y'(t-\tau)e^{-\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{0} y'(t-\tau)e^{\tau}d\tau + e^{-|t|}$

är en faltningsekvation $y * k = f$ och bestäm en lösning y. (6p)

3. Ett kausalt tidsdiskret filter har tillståndsekvationen

$$4y[n] - y[n-2] = 3x[n-1] + 2x[n-2].$$

a) Visa att filtret är stabilt. (5p)

b) Bestäm filtrets amplitudkarakteristik. (2p)

c) Bestäm utsignalen då insignalen är $x[n] = \sin\frac{n\pi}{2}$. (3p)

d) Bestäm utsignalen då insignalen är $x[n] = (-1)^n\left(3 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right)\theta[n]$. (4p)

4. Lös problemet $\begin{cases} y[n+2] - 2y[n+1] + 2y[n] = 0,\ n \ge 0, \\ y[n] = 0,\ n < 0,\ \ y[0] = y[1] = 1 \end{cases}$ $(n \in\ \ )$. (4p)

5. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0 \\ u'_y(x,1) = \delta\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \end{cases}$. (6p)

6. **a)** Visa att $\theta' = \delta$. (3p)

b) Visa att för ett stabilt tidskontinuerligt LTI-filter $\mathcal{F}$ med impulssvaret h gäller att $\mathcal{F}\left(e^{j\alpha t}\right) = \hat{h}(\alpha)e^{j\alpha t}$. (3p)

c) Visa att $\sin(bt) \overset{Laplace}{\supset} \dfrac{b}{s^2 + b^2}$. (3p)

BB

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder, fk, delB, TMA980, 1999-08-17, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen).Beta. Ej räknedosa.
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !
==

1. **a)** Beräkna $(\cosh(t)\theta(t)) * (\cos(t)\theta(t))$. (3p)

b) Beräkna $\left(a^n\theta[n]\right)*\left(b^n\theta[n]\right),\ a,b \in I\!R\setminus\{0\}$. Svaret skall ges utan $\sum$-tecken. (3p)

2. Ett LTI-filter har amplitudkarakteristiken $A(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$

och faskarakteristiken $\Phi(\omega) = -2\arctan\omega$.

a) Bestäm filtrets impulssvar och visa att filtret är kausalt och stabilt. Ange filtrets tillståndsekvation. (6p)

b) Bestäm svaret på $\cos t$. (2p)

c) Bestäm svaret på $\cos(t)\theta(t)$. (4p)

d) Bestäm svaret på $(1+t)e^t\theta(-t)$. (4p)

3. Ett diskret LTI-filter har impulssvaret $h[n]=\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\theta[n]$.

a) Visa att filtret är kausalt och stabilt. Ange filtrets tillståndsekvation. (3p)

b) Bestäm svaret på $\cos\frac{n\pi}{2}$. (3p)

c) Bestäm svaret på $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\theta[n]$. (5p)

4. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} + u'_t \quad , \ 0 < x < \pi,\ 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = x \end{cases}$. (7p)

5. **a)** Visa $\delta \overset{Fourier}{\supset} 1$. (3p)

b) Härled Plancherels formler. (4p)

c) Visa $tf(t) \overset{Laplace}{\supset} -F'(s)$. (2p)

d) Vad menas med att ett filter är tidsinvariant? (1p)

BB

CTH&GU matematiska institutionen

Tentamensskrivning i Fourieranalys för E2, 1996-08-27, kl. 8.45-12.45
Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, skall lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej dosa.
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !!!
==

1. Ett kausalt filter har tillståndsekvationen $y' + a\,y = b\,x' + c\,x$
(a,b,c komplexa tal).

a) För vilka komplexa tal a,b,c är filtret stabilt ? (3p)

Låt nu $a = \frac{1}{2}, b = 3, c = -\frac{3}{2}$:

b) Bestäm stegsvaret. (2p)

c) Bestäm en insignal som ger utsignalen $\sin\frac{t}{2}$. (2p)

d) Bestäm svaret på $\sin t$ (3p) och på $\sin t\theta(t)$ (4p). (7p)

e) Bestäm svaret på $e^t\theta(-t)$, på $e^{-t}\theta(t)$ och på $e^{-|t|}$ (6p).
Bestäm dessutom Ω så att hälften av den totala energin av utsignalen till $e^t\theta(-t)$ ligger i frekvensbandet $|\omega| \le \Omega$ (3p). (9p)

2. Lös värmeledningsproblemet $\begin{cases} u''_{xx} = u'_t & \text{för } 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) & \text{för } t \ge 0 \\ u(x,0) = 4\sin^4 x & \text{för } 0 \le x \le \pi \end{cases}$. (7p)

3. Bestäm det polynom av grad högst 4 som bäst approximerar funktionen $\sinh(x)$ i $L^2(-1,1)$. (6p)

4. Beräkna $\frac{1}{1+t^2} * \arctan t$. (4p)

5. Motivera Fouriers integralsats genom att utgå från en Fourierserie vars period går mot oändligheten. (4p)

6. **a)** Definiera "distribution". (1p)

b) Visa $\theta(t) \overset{Laplace}{\supset} \frac{1}{s}$. (2p)

c) Visa $\theta(t) \overset{Fourier}{\supset} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$. (3p)

BB

mat. met. E2, fk, del B, gamla tentor, svar (05)

05-08-16

1a) $y'' + 2y' + 2y = x''$ **b)** $(\theta)(t) = (\cos t - \sin t)e^{-t}\theta(t)$, $h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}\cos t\,\theta(t)$

c) högpassfilter **d)** $\left(\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}t\right)$, $\left(\cos\left(\sqrt{2}t\right)\theta(t)\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}t\right) + e^{-t}\cos t\right)\theta(t)$

2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}$ **3a)** $y[n] - y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n-1]$ **b)** $h[n] = \left(\sqrt{2}\right)^{2-n}\sin\frac{n\pi}{4}\,\theta[n]$

c) $-2\cos\frac{(n+1)\pi}{3}$ **4)** $n\theta[n]$ **5)** $u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\pi e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 t}\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right)$

05-03-30

1a) lågpassfilter, $h(t) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{t}{4}} - e^{-\frac{t}{2}})\theta(t)$ **b)** $\frac{1}{10}\left(3\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)$ **2)** $\frac{t}{4+t^2}$, $\frac{\pi}{2e^2}$, $\frac{\pi}{32}$

3b) $h[n] = \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\theta[n]$, $A(\alpha) = \left(85 + 32\cos^2\alpha + 108\cos\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{85}}\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \arctan\frac{6}{7}\right)$

4) $x[n] = \delta[n] + b(a+b)^{n-1}\theta[n-1]$ **5)** $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$

04-04-14

1a) $h(t) = \left(2t - t^2\right)e^{-t}\theta(t)$ **b)** $y''' + 3y'' + 3y' + y = 2x'$ **c)** $\frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$ **d)** $y(0) = \frac{1}{2}$

2) $-|t| - 2e^{-|t|}$ **3a)** $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$ **b)** $A(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}}$ **c)** $\frac{n+1}{2^n}\theta[n]$

d) $\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$ resp. $\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}\right)\theta[n]$ **4)** $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}t\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}x\right)$

00-12-15

1a) $h(t) = \delta(t) - \left(2e^{-2t}\cos\sqrt{2}\,t + \sqrt{2}\,e^{-2t}\sin\sqrt{2}\,t\right)\theta(t)$, $A(\omega) = |\omega|\sqrt{\frac{\omega^2+4}{\omega^4 - 8\omega^2 + 36}}$

b) $\frac{1}{6}\sin\sqrt{2}\,t + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos\sqrt{2}\,t$ **2)** $y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{\sqrt{3}}}$ **3b)** $\sqrt{\frac{13+12\cos\alpha}{17-8\cos 2\alpha}}$ **c)** $-\frac{1}{5}\left(2\sin\frac{n\pi}{2} + 3\cos\frac{n\pi}{2}\right)$

d) $\left(2^{-n} - (-1)^n\right)\theta[n]$ **4)** $\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}\theta[n]$ **5)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(1+2n)\pi\cosh((1+2n)\pi)}\sinh((1+2n)\pi y)\sin((1+2n)\pi x)$

99-08-17

1a) $\frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)\theta(t)$ **b)** $(n+1)a^n\theta[n]$ om $a = b$, $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\theta[n]$ om $a \neq b$

2a) $h(t) = 2te^{-t}\theta(t)$, tillst.ekv: $y'' + 2y' + y = 2x$ **b)** $\sin t$ **c)** $\left(\sin t - te^{-t}\right)\theta(t)$ **d)** $\frac{1}{2}te^{-|t|}$

3a) $y[n-1] + 3y[n] = 3x[n]$ **b)** $\frac{1}{10}\left(9\cos\frac{n\pi}{2} - 3\sin\frac{n\pi}{2}\right)$ **c)** $\frac{1}{10}\left(9\cos\frac{n\pi}{2} - 3\sin\frac{n\pi}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\theta[n]$

4) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}e^{-\frac{t}{2}}}{n\sqrt{4n^2-1}}\sin\left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\,t\right)\sin(nx)$

Tentamen Fourieranalys för E2, 96-08-27, lösningar

Uppgift 1

$x = \delta$ ger $h' + ah = b\delta' + c\delta$, Laplacetransformation ger $\mathfrak{F}$: s överföringsfunktion $H(s) = \frac{bs+c}{s+a}$.

a) $\mathfrak{F}$ är stabilt, om $\operatorname{Re} a < 0\,(a,b$ godt), eller om $c = ba\,(a,b$ godt.).

För $a = \frac{1}{2}, b = 3, c = \frac{-3}{2}$ är $H(s) = 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}$ och $\widehat{h}(\omega) = 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}}$, alltså:

b) $\mathfrak{F}(\theta) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{s} = 3\left(\frac{2}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{s}\right) \subset \underline{3\left(2e^{-\frac{t}{2}} - 1\right)\theta(t)}$.

c) Sätt in $y = \sin\frac{t}{2}$ i $\mathfrak{F}$:s tillståndsekvation $y' + \frac{1}{2}y = 3(x' - \frac{1}{2}x)$, så får du $\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} = 3(x' - \frac{1}{2}x)$ som satisfieras av $x(t) = \underline{-\frac{1}{3}\cos\frac{t}{2}}$.

d) $\mathfrak{F}(\sin t) = \left|\widehat{h}(1)\right|\sin\left(t + \arg\widehat{h}(1)\right) =$

$\left[\widehat{h}(1) = 3\frac{j-\frac{1}{2}}{j+\frac{1}{2}} \Rightarrow \left|\widehat{h}(1)\right| = 3 \text{ och } arg\widehat{h}(1) = \arg\left(-\left(\frac{1}{2} - j\right)^2\right) = \arg\left(\frac{3}{4} + j\right) = \arctan\frac{4}{3}\right] =$

$= \underline{3\sin\left(t + arc\tan\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{5}(3\sin t + 4\cos t)}$.

$\mathfrak{F}(\sin t\theta(t)) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{1+s^2} = \frac{3}{5}\left(-\frac{4}{s+\frac{1}{2}} + \frac{4s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}\right) \subset \underline{\frac{3}{5}\left(3\sin t + 4\cos t - 4e^{-\frac{t}{2}}\right)\theta(t)}$.

e) $\mathfrak{F}(e^t\theta(-t)) \supset 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{1-j\omega} = \frac{-2}{j\omega+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-j\omega} = -2\frac{2}{1+j(2\omega)} + \frac{1}{1-j\omega} \subset \underline{-2e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t\theta(-t)}$.

$\mathfrak{F}(e^{-t}\theta(t)) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{s+1} = 3\left(\frac{-2}{s+\frac{1}{2}} + \frac{3}{s+1}\right) \subset \underline{\left(-6e^{-\frac{t}{2}} + 9e^{-t}\right)\theta(t)}$. Och det ger nu:

$\mathfrak{F}(e^{-|t|}) = \mathfrak{F}(e^t\theta(-t) + e^{-t}\theta(t)) = \underline{\left(9e^{-t} - 8e^{-\frac{t}{2}}\right)\theta(t) + e^t\theta(-t)}$.

Anm: Det sista får du även direkt, men jobbigare (?):

$\mathfrak{F}(e^{-|t|}) \supset 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \bullet \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{-8}{j\omega+\frac{1}{2}} - \frac{8j\omega}{\omega^2+1} + \frac{10}{\omega^2+1} \subset \underline{-8e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + 5e^{-|t|} + 4e^{-|t|}sgnt}$.

$y(t) = \mathfrak{F}(e^t\theta(t))$ har den totala energin

$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{y}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{1-j\omega}\right|^2 d\omega = \;= \frac{1}{2\pi} \bullet 2\int_0^{\infty} 9 \bullet 1 \bullet \frac{1}{1+\omega^2}d\omega = \frac{9}{\pi}[\arctan\omega]_0^{\infty} =$

$\frac{9}{\pi} \bullet \frac{\pi}{2}$. I bandet $|\omega| \le \Omega$ ligger energin $E_\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\frac{9}{1+\omega^2}d\omega = \frac{9}{\pi}[\arctan\omega]_0^{\Omega} = \frac{9}{\pi}\arctan\Omega$.

Nu skall $E_\Omega = \frac{1}{2}E$, dvs. $\arctan\Omega = \frac{\pi}{4}$, alltså $\underline{\Omega = 1}$.

svar: a) $\operatorname{Re} a < 0,\ b,c$ godt eller $c = ab,\ a,b$ godt.

b) $3\left(2e^{-\frac{t}{2}} - 1\right)\theta(t)$ c) $-\frac{1}{3}\cos\frac{t}{2}$

d) $\frac{3}{5}(3\sin t + 4\cos t)$ resp. $\frac{3}{5}\left(3\sin t + 4\cos t - 4e^{-\frac{t}{2}}\right)\theta(t)$

e) $-2e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t\theta(-t)$ resp. $\left(-6e^{-\frac{t}{2}} + 9e^{-t}\right)\theta(t)$ resp. $9e^{-t} - 8e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t\theta(-t), \Omega = 1$

Uppgift 2

Ansättningen $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} \overset{!}{=} \lambda$, för X är det ett S-L-problem:

$\begin{cases} X'' = \lambda X, 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ med $\lambda \le 0$. Till $\lambda = 0$ hör egenlösningen $X_0(x) = c$.

Till $\lambda < 0$ hör lösningarna $X_\lambda(x) = a\cos\sqrt{-\lambda}\,x + b\sin\sqrt{-\lambda}\,x$.

$X_\lambda'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$, $X_\lambda'(\pi) = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\,\pi = 0 \Rightarrow \lambda_k = -k^2$, alltså:

$\lambda_k = -k^2$, $X_k(x) = \cos kx$, $k = 0,1,2...$

Till dessa λ_k har ekv. $T' = \lambda_k T$ lösningarna $T_k(t) = e^{\lambda_k t} = e^{-k^2 t}$, alltså är

$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx e^{-k^2 t}.$

För $t = 0$ skall $u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx = 4\sin^4 x =$
$=(1-\cos 2x)^2 = 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x) = \frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x$, dvs
$c_0 = \frac{3}{2}, c_2 = -2, c_4 = \frac{1}{2}$ och $c_k = 0$ för $k \notin \{0,2,4\}$.

svar: $\boxed{u(x,t) = \frac{3}{2} - 2e^{-4t}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-16t}\cos 4x}$

Uppgift 3

$P(x) = \sum_{k=1}^{4} c_k P_k(x)$ där $P_k(x)$ är Legendrepolynom och $c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} \sinh x P_k(x)dx.$
$c_0 = c_2 = c_4 = 0$, ty $\sinh x$ är udda och P_0, P_2, P_4 är jämna.
Eftersom P_1, P_2 är udda så är $c_1 = 3\int_o^1 x\sinh x dx = 3[x\cosh x - \sinh x]_0^1 =$

$= 3\cosh 1 - 3\sinh 1$ och $c_3 = 7\int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\sinh x dx = [\text{part.int}] =$
$= \frac{7}{2}[5(x^3\cosh x - 3x^2\sinh x + 6x\cosh x - 6\sinh x) - 3(x\cosh x - \sinh x)]_0^1 =$
$= \frac{7}{2}(32\cosh 1 - 42\sinh 1).$
Alltså är $P(x) = (3\cosh 1 - 3\sinh 1)x + \frac{7}{2}(16\cosh 1 - 21\sinh 1)(5x^3 - 3x).$

svar: $\boxed{\left(-65\cosh 1 + \frac{435}{2}\sinh 1\right)x + \left(280\cosh 1 - \frac{735}{2}\sinh 1\right)x^3}$

Anm: Rita $\sinh x$ och $P(x)$ för att se vilken fantastisk approximation det är; felet är
$\int_{-1}^{1}\left(\sinh x - \left(-65\cosh 1 + \frac{435}{2}\sinh 1\right)x - \left(280\cosh 1 - \frac{735}{2}\sinh 1\right)x^3\right)^2 dx = 0.3695 \times 10^{-5}$!

Uppgift 4

$f(t) = \frac{1}{1+t^2} * \arctan t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{1+t^2} * \frac{1}{1+t^2} \supset \pi^2 e^{-2|\omega|} = \frac{\pi}{2}\pi 2e^{-|2\omega|}$
$\left[e^{-|t|} \supset \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \supset \pi e^{-|\omega|}\right] \Rightarrow f'(t) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Rightarrow f(t) = \pi\arctan\frac{t}{2} + c$, eftersom

$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} \bullet \arctan(-\tau)d\tau = 0 \left[\text{udda integrand}\right]$, så är $c = 0$.

svar: $\boxed{\pi\arctan\frac{t}{2}}$