Tentamen Fourieranalys för E2, 96-08-27, lösningar

Uppgift 1

$x = \delta$ ger $h' + ah = b\delta' + c\delta$, Laplacetransformation ger $\mathcal{F}$: s överföringsfunktion $H(s) = \frac{bs+c}{s+a}$.

a) $\mathcal{F}$ är stabilt, om $\operatorname{Re} a > 0$ $(c, b$ godt$)$, eller om $c = ba$ $(a, b$ godt.$)$.

För $a = \frac{1}{2}, b = 3, c = \frac{-3}{2}$ är $H(s) = 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}$ och $\widehat{h}(\omega) = 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}}$, alltså:

b) $\mathcal{F}(\theta) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{s} = 3\left(\frac{2}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{s}\right) \subset \underline{3\left(2e^{-\frac{t}{2}} - 1\right)\theta(t)}$.

c) Sätt in $y = \sin\frac{t}{2}$ i $\mathcal{F}$:s tillståndsekvation $y' + \frac{1}{2}y = 3(x' - \frac{1}{2}x)$, så får du
$\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} = 3(x' - \frac{1}{2}x)$ som satisfieras av $\underline{x(t) = -\frac{1}{3}\cos\frac{t}{2}}$.

d) $\mathcal{F}(\sin t) = \left|\widehat{h}(1)\right| \sin\left(t + \arg\widehat{h}(1)\right) =$
$\left[\widehat{h}(1) = 3\frac{j-\frac{1}{2}}{j+\frac{1}{2}} \Rightarrow \left|\widehat{h}(1)\right| = 3 \text{ och } arg\widehat{h}(1) = \arg\left(-\left(\frac{1}{2} - j\right)^2\right) = \arg\left(\frac{3}{4} + j\right) = \arctan\frac{4}{3}\right] =$
$= \underline{3\sin\left(t + arc\tan\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{5}(3\sin t + 4\cos t)}$.
$\mathcal{F}(\sin t\theta(t)) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{1+s^2} = \frac{3}{5}\left(-\frac{4}{s+\frac{1}{2}} + \frac{4s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}\right) \subset \underline{\frac{3}{5}\left(3\sin t + 4\cos t - 4e^{-\frac{t}{2}}\right)\theta(t)}$.

e) $\mathcal{F}(e^t\theta(-t)) \supset 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{1-j\omega} = \frac{-2}{j\omega+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-j\omega} = -2\frac{2}{1+j(2\omega)} + \frac{1}{1-j\omega} \subset \underline{-2e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t\theta(-t)}$.
$\mathcal{F}(e^{-t}\theta(t)) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{s+1} = 3\left(\frac{-2}{s+\frac{1}{2}} + \frac{3}{s+1}\right) \subset \underline{\left(-6e^{-\frac{t}{2}} + 9e^{-t}\right)\theta(t)}$. Och det ger nu:
$\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \mathcal{F}(e^t\theta(-t) + e^{-t}\theta(t)) = \underline{\left(9e^{-t} - 8e^{-\frac{t}{2}}\right)\theta(t) + e^t\theta(-t)}$.

[Anm: Det sista får du även direkt, men jobbigare (?):

$\mathcal{F}(e^{-|t|}) \supset 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \bullet \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{-8}{j\omega+\frac{1}{2}} - \frac{8j\omega}{\omega^2+1} + \frac{10}{\omega^2+1} \subset \underline{-8e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + 5e^{-|t|} + 4e^{-|t|}sgnt}$].

$y(t) = \mathcal{F}(e^t\theta(t))$ har den totala energin
$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{y}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{1-j\omega}\right|^2 d\omega = \; = \frac{1}{2\pi} \bullet 2\int_0^{\infty} 9 \bullet 1 \bullet \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{9}{\pi}[\arctan\omega]_0^{\infty} =$
$\frac{9}{\pi} \bullet \frac{\pi}{2}$. I bandet $|\omega| \leq \Omega$ ligger energin $E_\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\frac{9}{1+\omega^2}d\omega = \frac{9}{\pi}[\arctan\omega]_0^{\Omega} = \frac{9}{\pi}\arctan\Omega$.
Nu skall $E_\Omega = \frac{1}{2}E$, dvs. $\arctan\Omega = \frac{\pi}{4}$, alltså $\underline{\Omega = 1}$.

svar: a) $\operatorname{Re} a > 0$, b, c godt eller $c = ab$, a, b godt.
b) $3\left(2e^{-\frac{t}{2}} - 1\right)\theta(t)$ c) $-\frac{1}{3}\cos\frac{t}{2}$
d) $\frac{3}{5}(3\sin t + 4\cos t)$ resp. $\frac{3}{5}\left(3\sin t + 4\cos t - 4e^{-\frac{t}{2}}\right)\theta(t)$
e) $-2e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t\theta(-t)$ resp. $\left(-6e^{-\frac{t}{2}} + 9e^{-t}\right)\theta(t)$ resp. $9e^{-t} - 8e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t\theta(-t), \Omega = 1$

Uppgift 2

Ansättningen $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} \stackrel{!}{=} \lambda$, för X är det ett S-L-problem:
$\begin{cases} X'' = \lambda X, \; 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ med $\lambda \leq 0$. Till $\lambda = 0$ hör egenlösningen $X_0(x) = c$.
Till $\lambda < 0$ hör lösningarna $X_\lambda(x) = a\cos\sqrt{-\lambda}\,x + b\sin\sqrt{-\lambda}\,x$.
$X'_\lambda(0) = 0 \Rightarrow b = 0$, $X'_\lambda(\pi) = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\,\pi = 0 \Rightarrow \lambda_k = -k^2$, alltså:
$\lambda_k = -k^2$, $X_k(x) = \cos kx$, $k = 0, 1, 2...$
Till dessa λ_k har ekv. $T' = \lambda_k T$ lösningarna $T_k(t) = e^{\lambda_k t} = e^{-k^2 t}$, alltså är

$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx e^{-k^2 t}.$

För $t = 0$ skall $u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx = 4\sin^4 x =$
$=(1-\cos 2x)^2 = 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x) = \frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x,$ dvs
$c_0 = \frac{3}{2}, c_2 = -2, c_4 = \frac{1}{2}$ och $c_k = 0$ för $k \notin \{0,2,4\}$.

svar: $\boxed{u(x,t) = \frac{3}{2} - 2e^{-4t}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-16t}\cos 4x}$

Uppgift 3

$P(x) = \sum_{k=1}^{4} c_k P_k(x)$ där $P_k(x)$ är Legendrepolynom och $c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} \sinh x P_k(x)dx.$
$c_0 = c_2 = c_4 = 0$, ty $\sinh x$ är udda och P_0, P_2, P_4 är jämna.
Eftersom P_1, P_2 är udda så är $c_1 = 3\int_{o}^{1} x\sinh x dx = 3[x\cosh x - \sinh x]_0^1 =$

$= 3\cosh 1 - 3\sinh 1$ och $c_3 = 7\int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\sinh x dx = [\text{part.int}] =$

$= \frac{7}{2}[5(x^3\cosh x - 3x^2\sinh x + 6x\cosh x - 6\sinh x) - 3(x\cosh x - \sinh x)]_0^1 =$
$= \frac{7}{2}(32\cosh 1 - 42\sinh 1).$
Alltså är $P(x) = (3\cosh 1 - 3\sinh 1)x + \frac{7}{2}(16\cosh 1 - 21\sinh 1)(5x^3 - 3x).$

svar: $\boxed{\left(-65\cosh 1 + \frac{435}{2}\sinh 1\right)x + \left(280\cosh 1 - \frac{735}{2}\sinh 1\right)x^3}$

Anm: Rita $\sinh x$ och $P(x)$ för att se vilken fantastisk approximation det är; felet är
$\int_{-1}^{1}\left(\sinh x - \left(-65\cosh 1 + \frac{435}{2}\sinh 1\right)x - \left(280\cosh 1 - \frac{735}{2}\sinh 1\right)x^3\right)^2 dx = 0.3695 \times 10^{-5}$!

Uppgift 4

$f(t) = \frac{1}{1+t^2} * \arctan t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{1+t^2} * \frac{1}{1+t^2} \supset \pi^2 e^{-2|\omega|} = \frac{\pi}{2}\pi 2e^{-|2\omega|}$
$\left[e^{-|t|} \supset \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \supset \pi e^{-|\omega|}\right] \Rightarrow f'(t) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Rightarrow f(t) = \pi\arctan\frac{t}{2} + c$, eftersom

$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} \bullet \arctan(-\tau)d\tau = 0$ [udda integrand], så är $c = 0$.

svar: $\boxed{\pi\arctan\frac{t}{2}}$