EXEMPEL TILL SAMPLINGSTEOREMET

Ett bra exempel för att testa samplingsteoremet är funktionen (uppg. FT3 sid. 18 i BB):

$$f(t) = \frac{2(1-\cos t)}{t^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} \overset{\text{Fourier}}{\supset} \hat{f}(\omega) = 2\pi(1-|\omega|)(\theta(\omega+1)-\theta(\omega-1))$$

som satisfierar förutsättningarna i samplingsteoremet, alltså gäller

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(n\pi)\sin(t-n\pi)}{t-n\pi} \quad (\alpha = 1\text{, Nyquist-rate } T = \pi\text{).}$$

Delsummorna $\sum_{n=-N}^{N} \frac{f(n\pi)\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}$ approximerar f mycket bra redan för låga N ($N = 1,2,3$), för $N > 4$ syns ingen skillnad mer.

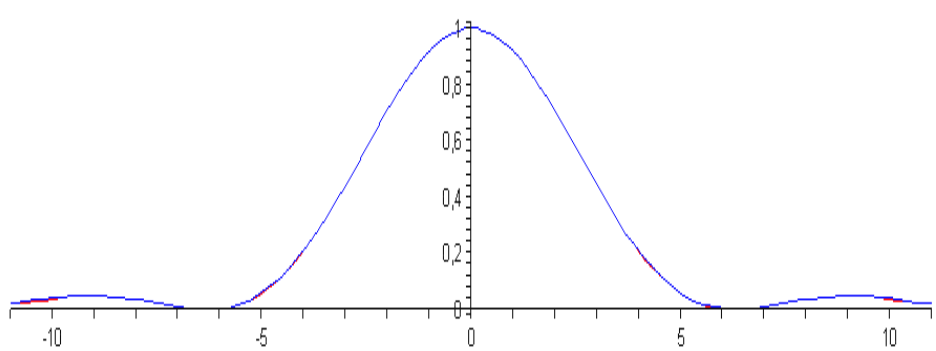
Kolla med *maple*:

```
> f:=t->(sin(t/2))^2/(t/2)^2:
> DS:=N->sum(f(n*Pi)*sin(t-n*Pi)/(t-n*Pi),n=-N..-
1)+sum(f(n*Pi)*sin(t-n*Pi)/(t-n*Pi),n=1..N)+sin(t)/t;
```

$$DS := N \to \left(\sum_{n=-N}^{-1} \frac{f(n\pi)\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}\right) + \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n\pi)\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}\right) + \frac{\sin(t)}{t}$$

Då kan vi rita $x(t)$ och delsummor; redan för t.ex. N=4 fås mycket bra approximation :

```
> with(plots):
> plotx:=plot(f(t),t=-11..11,color=red):
> plotDS:=plot(DS(4),t=-11..11,color=blue):
> display([plotx,plotDS]);
```



kolla att f är bandbegränsad ($\hat{f}(\omega)=0$ för $|\omega| \geq \alpha = 1$):

```
>  with(inttrans):
> fourier(f(t),t,omega);
```

$$2\,\pi\,((\omega+1)\,\mathrm{Heaviside}(\omega+1)+(\omega-1)\,\mathrm{Heaviside}(\omega-1)-2\,\omega\,\mathrm{Heaviside}(\omega))$$

```
> plot(%,omega=-3..3,thickness=2);
```