1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & 3z & = & 11 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & = & 9 \end{cases}$$

(3p)

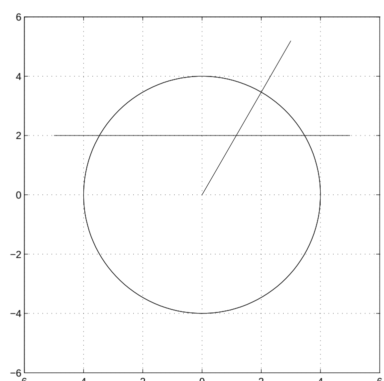
Svar: $\begin{cases} x & = & 7-2t \\ y & = & 3-t \\ x & = & t \end{cases}$

Lösning: $\begin{cases} 2x & - & y & + & 3z & = & 11 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & = & 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 4 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ & - & y & - & z & = & -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x & = & 7-2t \\ y & = & 3-t \\ x & = & t \end{cases}$

b) Rita följande mängder i komplexa talplanet:
$\{z;\ \mathrm{Im} z = 2\}$, $\{z;\ |z| = 4\}$ och $\{z;\ \arg z = \frac{\pi}{3}\}$. (3p)

Svar:



c) Bestäm alla reella lösningar x till ekvationen $|3x-1| - |x-4| = 2$. (3p)

Svar: $x = -\frac{5}{2}$ och $x = \frac{7}{4}$

Lösning:

För $4 \le x$ gäller: $|3x-1|-|x-4| = 2 \Leftrightarrow 3x-1-(x-4) = 2 \Leftrightarrow 2x = -1$ som saknar lösning då $4 \le x$.

För $\frac{1}{3} \le x \le 4$ gäller: $|3x-1| - |x-4| = 2 \Leftrightarrow 3x-1+(x-4) = 2 \Leftrightarrow 4x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$.

För $x \le \frac{1}{3}$ gäller: $|3x-1| - |x-4| = 2 \Leftrightarrow -(3x-1)+(x-4) = 2 \Leftrightarrow -2x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$.

d) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{\ln(x^2+1)}$. (2p)

Svar: $\frac{1}{2}$

Lösning:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+3)}{\ln(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)+\ln(1+\frac{3}{x})}{2\ln(x)+\ln(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\ln(x)}}{2+\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln(x)}} = \frac{1}{2}$$

e) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $2\cos^2 x - \cos x = 1$. (3p)

Svar: $x = \dfrac{n2\pi}{3}$

Lösning: $2\cos^2 x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\cos x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = n2\pi$

$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + n2\pi$

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Visa att $\ln(1+x) > \dfrac{2x}{2+x}$ för alla $x > 0$. (6p)

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$. Skall då visa att $f(x) > 0$ för alla $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(2+x)-2x}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}.$$

Detta ger följande tabell:

x	0	$0 < x$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

Tabellen bevisar att $f(x) > 0$ för alla $x > 0$.

3. Bestäm avståndet från punkten $(4,-3,2)$ till planet $2x - y + 3z = 7$. (6p)

Lösning:

En normal för planet är vektorn $\boldsymbol{n} = (2,-1,3)$, en punkt i planet är t.ex. $P_0 = (2,0,1)$.

Avståndet från punkten $P_1 = (4,-3,2)$ till planet är längden av projektionen $\boldsymbol{v_n}$ av vektorn $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = (4,-3,2) - (2,0,1) = (2,-3,1)$ på normalvektorn $\boldsymbol{n}$.

Vektorn $\boldsymbol{v_n}$ ges av projektionsformeln: $\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n}$.

Längden av $\boldsymbol{v_n}$ är då : $\dfrac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

Vi har alltså $d = \dfrac{|(2,-3,1)\cdot(2,-1,3)|}{\sqrt{4+1+9}} = \dfrac{4+3+3}{\sqrt{14}} = \dfrac{5\sqrt{14}}{7}$

4. Skissa grafen till $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{(x-2)^3}$. Ange var funktionen är växande respektive avtagande, lokala extrempunkter, asymptoter samt skärningspunkter mellan grafen och koordinataxlarna. (6p)

Lösning: $D_f = D_{f'} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\}$. Sätt $g(t) = \dfrac{\ln|t|}{t^3}$. g är en udda funktion och $f(x) = g(x-2)$. Det räcker således att undersöka f för $x > 2$.Slutsatser om f för $x < 2$ kan dras genom symmetriresonemang.

Vi har att $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = -\infty$ och $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$ (standardgränsvärden). Då är $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Av symmetriskäl har vi då också att $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ och $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

Linjen $x = 2$ är lodrät asymptot, linjen $y = 0$ är vågrät asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. Det finns inga andra asymptoter.

Vidare är $f(0) = -\dfrac{\ln 2}{8}$ och $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm 1$. Grafen skär koordinataxlarna i punkterna $(0, -\dfrac{\ln 2}{8})$, $(1,0)$ och $(3,0)$.

$$f'(x) = \frac{1 - 3\ln|x-2|}{(x-2)^4}.$$

För $x > 2$ gäller: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 + e^{\frac{1}{3}}$

$f(2 + e^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3e}$.

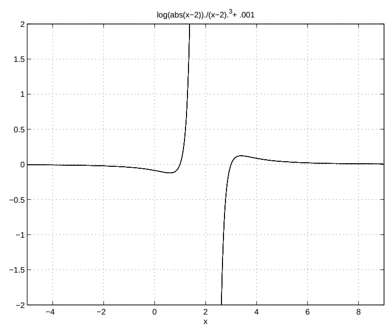
Vi får nu följande tabell:

x	2	$2 < x < 2 + e^{\frac{1}{3}}$	$2 + e^{\frac{1}{3}}$	$2 + e^{\frac{1}{3}} < x$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3e}$	$\searrow$	0

Funktionen har lokalt maximum i punkten $(2+e^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3e})$, den är växande i intervallet $]2, 2+e^{\frac{1}{3}}]$ och avtagande i intervallet $[2+e^{\frac{1}{3}}, \infty[$.

Av symmetriskäl har funktionen lokalt minimum i punkten $(2-e^{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{3e})$. Den är avtagande i intervallet $[2-e^{\frac{1}{3}}, 2[$ och växande i intervallet $]-\infty, 2-e^{\frac{1}{3}}]$.

Detta ger följande graf:



5. Beräkna för alla konstanter α gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}((x+1)^\alpha - x^\alpha)$.
Tips: använd medelvärdessatsen. (6p)

Lösning: Sätt $f(t) = t^\alpha$. Då är $(x+1)^\alpha - x^\alpha = f(x+1) - f(x)$.

Funktionen f är deriverbar i $]0, \infty[$. För $x > 0$ är f därför kontinuerlig i det slutna intervallet $[x, x+1]$ och deriverbar i det öppna $]x, x+1[$ med derivatan $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$.

Medelvärdessatsen kan således tillämpas.

Det finns alltså en punkt $\xi \in]x, x+1[$ sådan att

$(x+1)^\alpha - x^\alpha = f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(\xi) = \alpha\xi^{\alpha-1}$.

Alltså gäller: $\lim_{x\to\infty}((x+1)^\alpha - x^\alpha) = \lim_{\xi\to\infty} \alpha\xi^{\alpha-1} = \begin{cases} \infty & \text{om} \quad \alpha > 1 \\ 1 & \text{om} \quad \alpha = 1 \\ 0 & \text{om} \quad \alpha < 1 \end{cases}$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

a) Låt f vara deriverbar i $]-\infty, \infty[$. Antag att f har precis tre olika nollställen. Då har f' minst två olika nollställen.

Lösning: Sann, om $a < b < c$ är de tre nollställena så har derivatan nollställen i intervallen $]a, b[$ och $]b, c[$.

b) Låt f vara deriverbar i $]-\infty,\infty[$. Antag att f har precis tre olika nollställen. Då har f' högst två olika nollställen.

Lösning: Falsk, derivatan kan ha t.ex tre nollställen mellan två nollställen för funktionen.

c) $\dfrac{\ln x}{\ln y} = \ln(x-y)$.

Lösning: Falsk, testa med $x = y \neq 1$.

d) Om $f(x)$ är uppåt begränsad så är $\frac{1}{f(x)}$ nedåt begränsad.

Lösning: Falsk, testa med $f(x) = \sin(x)$

e) Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in D_f$ så är f konstant.

Lösning: Falsk, testa med $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

f) Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in (0,1)$ så är f konstant på $(0,1)$.

Lösning: Sann,följer av medelvärdessatsen.

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I.

b) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

c) Visa, med hjälp av medelvärdessatsen, att en funktion f är strängt växande på intervallet I om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$. (6p)

Lösning: Hittar du i kursboken.

För godkänt krävs 20p (inklusive ev. bonuspoäng), för betyg 4 krävs 30p, för betyg 5 krävs 40p. Lösningar finns tillgängliga på kursens hemsida senast första vardagen efter tentamensdagen.