

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) För vilka reella tal x gäller att $|2x + 3| - |x - 2| = 1$? (3p)

b) R är mängden av reella tal och $A \subset R$. Negera utsagan: "för alla $y \in A$ finns $x \in R$ så att $x^2 = y$ ". (2p)

c) För vilka reella tal x gäller att $2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+1} = 20$? (2p)

d) Skriv det komplexa talet $(\sqrt{3} + i)^{50}$ på formen $a + ib$ utan hjälp av cosinus- eller sinus-funktioner i svaret. (2p)

e) Vad är $f'(\frac{\pi}{6})$ om $f(x) = 4 \cos^3 x + \tan^3 x$? (2p)

f) Ange något värde på a så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + ay + 2z = 1 \\ -2x + 2y + az = a \end{cases}$$

har många lösningar. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm alla reella tal x så att $\frac{3x + 7}{x + 1} > \frac{5}{2 - x}$ (6p)

3. Låt $f(x) = x^{\sin x}$.

a) beräkna $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b) Bestäm ekvationer för tangent och normal till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(1,1)$. (7p)

4. Fyra punkter i rummet är givna med koordinater i ett ON-system:

$P_1 : (1, 0, 1)$, $P_2 : (-1, 1, 1)$, $P_3 : (2, 2, 0)$ och $P_4 : (3, 2, 1)$. (6p)

a) Bestäm, på parameterform, den linje som går genom P_4 och är vinkelrät mot planet genom P_1 , P_2 och P_3 .

b) Beräkna volymen av tetraedern med hörn i P_1 , P_2 , P_3 och P_4 .

5. Visa att ekvationen $x - 2 = \ln x$, $x > 0$ har exakt två rötter. Bestäm också två intervall $[a, b]$ och $[c, d]$ med $a < b < c < d$ sådana att vardera intervallet innehåller en rot. (5p)

VÄND!

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

- a) Ekvationen $z^n = 1$ har exakt n stycken olika komplexa rötter för varje positivt heltal n .
- b) $e^z \neq 0$ för varje komplext tal z .
- c) Om f är en inverterbar funktion så är f strängt monoton.
- d) Om f är deriverbar i en punkt a så är f också kontinuerlig i a .
- e) Om f är deriverbar i en omgivning av a och $f'(a) = 0$ så har f ett lokalt extremvärde i a .
- f) Om f är två gånger deriverbar i en omgivning av a och $f''(a) < 0$ så har f ett lokalt maximum i a .

(6p)

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I .

b) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

c) Med hjälp av medelvärdessatsen är det ganska lätt att bevisa att om $f'(x) > 0$ på ett intervall I så är f strängt växande på I . Gör det!

(6p)