

Tentamen i TMV120 Inledande matematik Z, 2009–10–22, f V

Telefon: Ida Säfström, 0703-088304

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Tentamen omfattar 50 poäng. Maximal poäng för varje uppgift ges i marginalen. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Tentamen återfås i början av läsperiod 2 i samband med föreläsning i efterföljande kurs.

1. Till denna uppgift skall endast svar lämnas in, alltså utan motiveringar.

(a) Bestäm $(f^{-1})'(-1)$ om $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 5$. **(2p)**

(b) Skriv $(-2i - 2)^6$ på formen $a + bi$. **(2p)**

(c) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2t - m + v = 0 \\ t + m + v = 3 \\ 2t - 3m + v = -4 \end{cases}$. **(2p)**

(d) Bestäm samtliga asymptoter till $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. **(2p)**

(e) Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) \ln x \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^4)}{\ln(1 + x^2)} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{4^x}$$

(3p)

(f) Bestäm en ekvation för tangenten till enhetscirkeln i punkten $(\sqrt{3}/2, 1/2)$. Ekvationen ska vara på formen $y = kx + m$ och vara förenklad så långt som möjligt. **(2p)**

Till uppgifterna 2-5 skall fullständiga lösningar lämnas in.

2. (a) Bestäm projektionen av punkten $P = (1, 1, -1)$ på linjen som går genom origo och punkten $(6, 3, 2)$. Vad är det kortaste avståndet från P till linjen? **(3p)**

(b) Låt L vara linjen genom origo som är vinkelrät mot $(1, 1, 0)$ och $(1, 0, 1)$. Bestäm en ekvation för planet som innehåller L och punkten $(1, 2, 0)$. **(3p)**

3. Skissa grafen av $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}e^{-x}$, och ange funktionens lokala extrempunkter och asymptoter. Konvexitet behöver inte utredas. **(6p)**

4. Bestäm värdemängden av funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1/x & \text{om } 0 < x \leq 2 \\ -e^{\frac{1}{4-x}} & \text{om } 2 < x < 4 \end{cases}$ **(6p)**

5. i. Bevisa eller motbevisa följande påstående: Låt $h(x) = f(x)g(x)$. Då är funktionen h konvex om f och g är konvexa. **(4p)**

ii. Vilka enhetsvektorer $\vec{v}$ (dvs $\|v\| = 1$) bildar vinkeln $\pi/3$ både med $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ och med $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$? **(2p)**

Vänd!

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivering krävs ej. Rätt svar ger 1 poäng, inget svar 0 poäng och fel svar -1 poäng. Dock är 0 minsta möjliga poäng totalt.

(6p)

(a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är avtagande funktioner är $f(g(x))$ växande.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$

(c) Om $f(x)$ antar sitt största värde i $x = 5$ antar $g(x) = e^{2f(x)}$ sitt största värde i $x = \ln \frac{5}{2}$

(d) Om $\vec{u} \neq \vec{0}$ och $\vec{v} \neq \vec{0}$ men $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ så är $\vec{u}$ och $\vec{v}$ parallella. Även motriktade vektorer (t.ex. $\vec{u}$ och $-\vec{u}$) betraktas som parallella.

(e) $a > b \implies a \geq b$

(f) Om f är en strängt konvex funktion (f' är strängt växande) på ett intervall så skär dess graf varje linje i högst två punkter.

7. (a) Ange definitionen av ortogonalprojektion av en punkt på en linje. Härled också formeln för ortogonalprojektion. (4p)

(b) Formulera och bevisa Rolles sats. (3p)

Hodně stěsí!!

/jacob

1. (a) Eftersom $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0$ är funktionen strängt växande och därför inverterbar. Genom att gissa ser vi att $x = 1$ är en rot till ekvationen $f(x) = -1$, så $f^{-1}(-1) = 1$. Alltså ger formeln för derivatan av inversen att

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5 + 3 + 2} = \frac{1}{10}.$$

(b) Vi skriver först talet $z = -2 - 2i$ på polär form: $z = |z|e^{i \arg z} = -2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Alltså är $z^6 = (-2\sqrt{2})^6 e^{\frac{6i\pi}{4}} = -2^9 i = -512i$.

(c) Genom att göra radoperationer får vi successivt följande ekvivalenta system:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & -10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & -2/15 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & -2/15 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Lösningen är alltså $(t, m, v) = (1, 2, 0)$.

(d) Eftersom funktionen är kontinuerlig så är den begränsad på varje slutet ändligt intervall. Alltså kan bara horisontella och sneda asymptoter finnas. För stora x beter sig funktionen som $\sqrt{x^2} = |x|$. Vi väntar oss därför att $y = x$ samt $y = -x$ är sneda asymptoter. Att $y = x$ är en asymptot då $x \rightarrow \infty$ beror på att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|\sqrt{1 + 1/x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(\sqrt{1 + 1/x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Eftersom x går mot oändligheten kan vi anta att x är positivt, och då är $|x| = x$. Vi måste nu göra samma sak för asymptoten $y = -x$ då $x \rightarrow -\infty$. Då gäller istället att $|x| = -x$. Vi behöver inte göra om hela beräkningen eftersom gränsvärdet faktiskt blir samma som det första:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - (-x) = \left[\begin{array}{c} x = -t \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t^2 + 1} - t = 0.$$

Man kan också hitta asymptoterna genom att först räkna ut $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$ och $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx$.

(e) i.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1 - \cos x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x} \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0 \cdot 0 = 0.$$

Den första faktorn är ett standardgränsvärde, och att den andra är noll följer av att göra substitutionen $t = 1/x$ i standardgränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t}$.

ii.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^4)}{\ln(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{x^2 \ln(1 + x^4)}{x^4 \ln(1 + x^2)} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0.$$

iii. Funktionen kan skrivas om som $4^{-x}x^4$. Eftersom båda faktorer växer obegränsat finns det inget att undersöka. Produkten går illa kvikt mot oändligheten. Svar: ∞ .

(f) Cirkelns ekvation är $x^2 + y^2 = 1$. Implicit derivering ger $2x + 2yy' = 0 \implies y' = -x/y = -\sqrt{3}$. Tangentens ekvation är därför

$$y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}x + \frac{3}{2}.$$

Detta kan förenklas till

$$y = 2 - \sqrt{3}x.$$

Uppgiften kan också lösas genom att derivera $y = \sqrt{1 - x^2}$.

2. (a) En riktningsvektor för linjen är $\vec{v} = (6, 3, 2)$, och en punkt på linjen är $P_0 = (0, 0, 0)$. Projektionen är

$$\tilde{P} = \frac{(P - P_0) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} + P_0 = \frac{7}{49}(6, 3, 2) = \frac{1}{7}(6, 3, 2).$$

Avståndet är

$$\|P - \tilde{P}\| = \|(1, 1, -1) - \frac{1}{7}(6, 3, 2)\| = \|\frac{1}{7}(1, 4, -9)\| = \frac{1}{7}\|(1, 4, 9)\| = \frac{\sqrt{1+16+81}}{7} = \sqrt{2}.$$

(b) Linjen är parallell med vektorn

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 1) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_1 = (1, -1, -1).$$

Eftersom planet innehåller origo är även $\vec{u} = (1, 2, 0)$ en riktning i planet. Alltså är en normal

$$\vec{v} \times \vec{u} = (2, -1, 3).$$

Detta ger att planets ekvation är $2x - y + 3z = 0$.

3. Definitionsmängden är $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Derivatan är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{x+1}{2x+3} + \frac{2x+3-2(x+1)}{(2x+3)^2}\right)e^{-x} = \frac{-(2x+3)(x+1) + 2x+3-2(x+1)}{(2x+3)^2}e^{-x} = \\ &= \frac{-2x^2-5x-2}{(2x+3)^2}e^{-x}. \end{aligned}$$

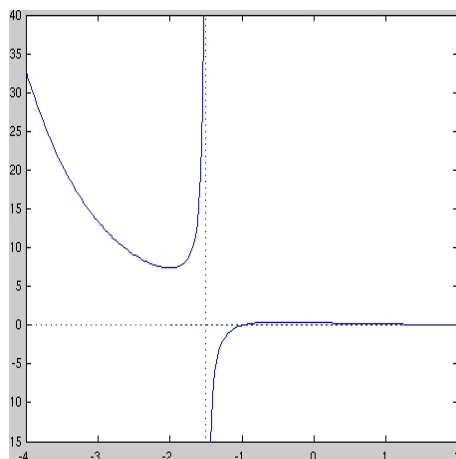
Eftersom nämnaren och exponentialfunktionen är positiva så har f' samma tecken och nollställen som $p(x) = -(x^2 + \frac{5}{2}x + 1)$. De kritiska punkterna är alltså $x = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25-16}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \implies x = -2$ eller $x = -\frac{1}{2}$. Då $x \ll 0$ är $f'(x)$ negativ och f' växlar tecken när vi passerar de två kritiska punkterna. Detta ger teckentabellen

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	lok.min	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok.max	$\searrow$

De relevanta gränsvärdena är

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}-} f(x) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}+} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Vi observerar också att $f(-1) = 0$ och ritar sedan in detta. De lokala extremvärdena är $f(-2) = e^2$ och $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{4}$. Asymptoterna är $y = 0$ och $x = -\frac{3}{2}$. Det finns inga (andra) sneda asymptoter, eftersom $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - kx - m$ aldrig kan bli noll (exponentialfunktionen växer mycket snabbare än polynomen). En del av funktionens graf visas här:



FIGUR 1. $y = \frac{x+1}{2x+3}e^{-x}$, $y = 0$ och $x = -\frac{3}{2}$

4. Värdeområdet är unionen av värdeområdena V_g och V_h , där $g(x) = x^2 + 1/x$ för $0 < x \leq 2$, och $h(x) = -e^{\frac{1}{4-x}}$ för $2 < x < 4$. Vi deriverar som vanligt:

$$g'(x) = 2x - 1/x^2 = (2x^3 - 1)/x^2.$$

Den enda kritiska punkten är $x_0 = 2^{-\frac{1}{3}}$. Med samma metod som i förra uppgiften kan man se att är ett globalt minimum för funktionen g (dock ej för f). Det minimala värdet är $g(x_0) = 2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$. Eftersom $g(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0+$, och g är kontinuerlig ger satsen om mellanliggande värde att $V_g = [g(x_0), \infty)$. Vi upprepar förfarandet för h :

$$h'(x) = -e^{\frac{1}{4-x}} \left(-\frac{1}{(4-x)^2} \right) (-1) = -\frac{e^{\frac{1}{4-x}}}{(4-x)^2} < 0.$$

Alltså är h strängt avtagande. Vi har gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = -\sqrt{e}, \quad \lim_{x \rightarrow 4-} h(x) = -\lim_{t \rightarrow \infty} e^t = -\infty.$$

Satsen om mellanliggande värde ger nu att $V_h = (-\infty, -\sqrt{e})$.

Observera att $-\sqrt{e} < 0 < g(x_0)$. Alltså är $V_f = (-\infty, -\sqrt{e}) \cup [2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{e}, 2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})$.

5. i. Funktionerna $f(x) = x^2$ och $g(x) = x^2 - 1000$ är båda strängt konvexa eftersom $f''(x) = g''(x) = 2$, vilket är större än noll. Däremot är $h(x) = x^4 - 1000x^2$, så $h''(x) = 12x^2 - 2000$. Denna funktion är negativ nära $x = 0$, alltså är h ej konvex.

5. ii. Villkoren kan skrivas $\|\vec{v}\| = 1$, $\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{2}$ och $\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$, eftersom $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, och $\|\vec{v}\| = \|\vec{e}_i\| = 1$ (vi använder Thm 1, C:10.2 i Adams). Alltså vet vi att $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$. Det återstående villkoret blir att $1 = \|\vec{v}\|^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + v_3^2$. Detta ger att $v_3 = \frac{1}{2}$, så $v_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Svar: $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$.

6. (a) Sant. Antag att $x \leq y$. Då är $g(y) \leq g(x)$, vilket implicerar att $f(g(x)) \leq f(g(y))$.

(b) Falskt. En funktion kan avta mot oändligheten men ändå oscillera snabbt. Ett motexempel är $f(x) = \frac{\sin x^3}{x}$. Det är sant att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ pga gränsvärdesregeln 7) på teorilistan. Derivatans är $f'(x) = \frac{3x^3 \cos(x^3) - \sin x^3}{x^2}$. Den första termen är obegränsad, och den andra går mot noll. Alltså är derivatan obegränsad, och går därför inte mot noll.

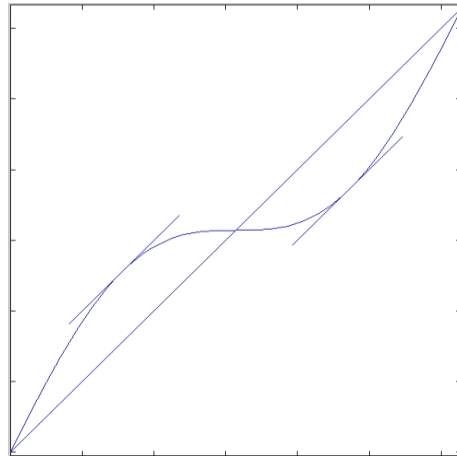
(c) Falskt. Eftersom funktionen $h(u) = e^{2u}$ är strängt växande så är $g(x) = h(f(x))$ som störst då $f(x)$ är som störst, dvs $g(x)$ antar också sitt största värde då $x = 5$.

(d) Sant. Längden av kryssprodukten är produkten av de två vektorernas längder och sinus för

den mellanliggande vinkeln. Detta ger att vinkeln mellan dem måste vara 0 eller π , och därför är de parallella. Förklaring nr2 (intuitiv): Varje parallelepiped med $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som sidor har volymen noll...

(e) Sant. Detta är sant per definition.

(f) Sant. Detta följer från medelvärdessatsen: Antag att det finns tre skärningar. Om derivatan av linjen är k så finns det två olika punkter (mellan skärningspunkterna nr1 och nr2 och mellan nr2 och nr3) där $f' = k$. Detta är en motsägelse eftersom f är strängt växande.



FIGUR 2. Deriverbar funktion som skär en linje i tre punkter.

7. Se teorilistan (för sidhänvisning) och föreläsningssanteckningarna.
/jacob