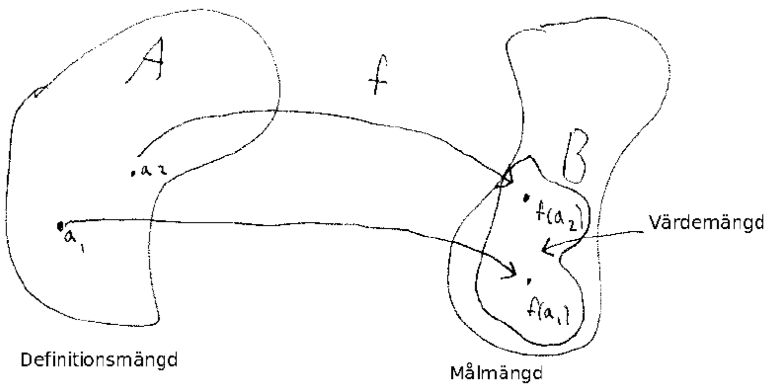
1 Fredag v. 3

Mer om funktioner

En funktion i allmänhet måste inte vara definierad på (en delmängd av $\mathbb{R}$) och dess värden måste inte vara reella tal (dvs målmängden måste inte vara $\mathbb{R}$). Ett exempel: $f(x,y) = (x, 2xy, y)$. Denna funktions definitionsmängd är planet och målmängden är rummet. I allmänhet kan vi ha en funktion från en mängd A till en annan mängd B. Mängderna A och B får vara vad som helst. Funktionen ska alltså berätta vad $f(a)$ är för varje element a som ligger i A, men resultatet $f(a)$ måste vara ett element i B. Vi säger att $f(a)$ är ***bilden*** av a under avbildningen f, och att a är dess ***urbild***. Mängden av av alla funktionens värden, dvs $V_f = \{f(a) | a \in A\}$, kallas för funktionens ***värdemängd***. I bilden nedan kan vi säga att värdemängden består av alla element (punkter) i B som träffas av någon pil. Definitionsmängden A brukar ofta betecknas med D_f . Skillanden mellan målmängd och värdemängd är alltså att målmängden är mängden av de värden som man har bestämt är tillåtna, och värdemängden är de värden som faktiskt antas.

Funktion från A till B



Vi säger att funktionen f är ***surjektiv*** om dess värdemängd är hela B, dvs $V_f = B$. (Det gäller alltid att värdemängden är en delmängd till B). Om vi ändrar B till att vara V_f (vi ändrar då funktionen) så blir funktionen surjetiv. (Varje funktion är surjektiv på sin värdemängd.)

En ***injektiv*** funktion är en funktion som bara antar varje värde en gång. Det betyder att om $f(x) = f(y)$ så måste $x = y$. Ett annat sätt att säga det är att om $x \neq y$ så är också $f(x) \neq f(y)$. I bilden betyder detta att varje element i B träffas av antingen en pil eller ingen pil. Ett annat ord för detta är ett-till-ett (eng. one-to-one).

Om f råkar vara funtad så att den är både injektiv och surjektiv så säger vi att den är ***bijektiv***. I termer av bilden ovan betyder det att varje punkt i B träffas av **exakt** en pil. För alla funktioner måste exakt en pil utgå ifrån varje element i A. Alltså är punkterna i A och B perfekt ihop-parade! ”Varje person i A har exakt en kompis i B och tvärtom!”

Om det är så att f är bijektiv så kan vi skapa en ny funktion från B till A som vi kallar för f^{-1}, som utläses f-***invers***. Vi får denna funktion genom att vända på alla pilar! Dvs om $f(a) = b$ så är $f^{-1}(b) = a$, (och tvärt om, ty båda likheter säger att a och b är varandras ”pilkompisar”).

Funktionen $f : A \to A$ som ges av $f(x) = x$ kallas för ***identitetsfunktionen*** och betecknas med 1_A eller Id_A. Ett kort sätt att uttrycka att funktionerna f och g är varandras inverser är att säga att $g \circ f = 1_A$ och $f \circ g = 1_B$. Vi låter detta vara den formella definitionen av invers funktion.

Övning: *Visa att om f inte är bijektiv så kan den inte ha en invers: Det vill säga, om f har en invers $g = f^{-1}$, visa att f är bijektiv.*

Om funktionen är injektiv men inte surjektiv så existerar en invers, men den är bara definierad på värdemängden. Om funktionen inte ens är injektiv kan man välja en delmängd av definitionsmängden där funktionen är injektiv. Vi kommer att göra precis detta i följande exempel:

ex. **(Arcussinus)** Låt $f(x) = \sin x$. Vi låter mängden $[-1, 1]$ vara målmängden, så att funktionen blir surjektiv. Eftersom sinus är periodisk är den verkligen inte injektiv på sin definitionsmängd $\mathbb{R}$. Vi definierar en ny funktion $g(x)$ som är *restriktionen* av $f(x)$ till intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, dvs samma funktion som $\sin x$, men vi minskar definitionsmängden till detta intervall. Funktionen $g(x)$ är bijektiv, och har därför en invers som vi kallar för $\arcsin$. Vissa författare, även Adams, skriver istället sin^{-1}, men detta är missvisande eftersom $\sin$ inte är bijektiv – den har ingen invers! Funktionen $arcsin$ är inte invers till $\sin$, den är inversen av g, och det är inte samma funktion. Varför är detta viktigt? Eftersom $\sin(\pi/6) = 1/2$ gäller det att $\arcsin(1/2) = \pi/6$. Om $\arcsin$ vore inversen av $\sin$ hade det också gällt att $\arcsin(1/2) = \arcsin(\sin(\pi/6 + 2\pi)) = \pi/6 + 2\pi$, men $\arcsin(1/2)$ kan bara vara ett tal. Figuren i slutet av filen illustrerar skillnaden mellan g och $\sin$.

Kom ihåg: $D_{\arcsin} = V_g = [-1, 1]$ och $V_{\arcsin} = D_g = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dvs tvärtom än för g.

ex. **(Arcuscosinus)** Vi gör nu samma för $f(x) = \cos x$. Denna funktion är bijektiv på intervallet $[0, \pi]$. Låt $g(x)$ vara restriktionen av $f(x)$ till detta intervall. Då är $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv, och vi kallar inversen för $\arccos$. Återigen är detta ingen invers till $\cos$ (som saknar invers), ty $\cos \arccos x = x$, men $\arccos \cos \theta$ är inte alltid lika med θ. I allmänhet kan vinkeln bli förskjuten med 2π och/eller ändra tecken.

Kom ihåg: $D_{\arccos} = V_g = [-1, 1]$ och $V_{\arccos} = D_g = [0, \pi]$.

ex. **(Arcustangens)** Vi låter $g(x) = \tan x$ vara definerad på intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Inversen av g kallas för $\arctan$ och är definerad på hela $\mathbb{R}$. Eftersom $\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$ gäller att

$$\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Kom ihåg: $D_{\arctan} = V_g = (-\infty, \infty)$ och $V_{\arctan} = D_g = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Derivatan av en invers

Sats: *Antag att f är deriverbar i intervallet (a, b) och att $f'(x_0) \neq 0$ för en punkt $x = x_0$ som ligger i detta intervall. Om dessutom f är strängt monoton på (a, b) så har f en invers som är deriverbar i punkten $y = f(x_0)$.*

Då derivatan av f^{-1} existerar i punkten $y = f(x_0)$ är det lätt att räkna ut vad derivatan faktiskt blir – den blir $1/f'(x_0)$ – se satsen nedan!

3 Fredag v. 3

Att däremot visa själva existensen ovan är lite mer tekniskt, så vi låter bli!

Sats: Låt $y = f(x)$ och antag att f har en invers och att både $f'(x) = f'(f^{-1}(y))$ och $(f^{-1})'(y)$ existerar. Då är $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Bevis: Vi vet att $y = 1_{\mathbb{R}}(y) = f(f^{-1}(y))$. Derivering av båda sidorna med avseende på y mha kedjeregeln ger att

$$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot \left(f^{-1}\right)'(y).$$

Ingen av faktorerna kan vara noll då vänsterledet är ett. Alltså får vi den önskade formeln.

Alltså har vi en formel för derivatan av inversen: 1 delat med derivatan sammansatt med inversen själv. Det finns bara ett problem: Kedjeregeln gäller bara om vi redan vet att f^{-1} överhuvudtaget har en derivata! Vi har inte visat att derivatan existerar! Vi har bara visat att om den existerar så kan vi räkna ut den. Vi kan dock använda den första satsen ovan för existensen i många fall.

ex. **(Derivatan av arcusfunktionerna)**
Låt $y = f(x) = \arcsin x$ och $x = \sin y$. Vi vet att $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Det gäller att $f'(x) = 1/g'(y) = 1/\cos y$. Vi skulle kunna svara med $f'(x) = 1/\cos(\arcsin x)$, men vi förenklar detta genom att använda trigonometriska ettan:
$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$. Vi kan faktiskt utesluta minustecknet eftersom cos är positiv på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. **Slutsats:** $D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Övning: Visa att $D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ genom att härma ovanstående eller genom att utnyttja att $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ (detta beror på att $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. Visa sedan att $D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ genom att använda formeln för tangens derivata. Tips: Det finns två. Välj den som gör att man får räkna mindre!