Lite utvidgad träningstänta till ALA-A, 2007

Du ser här alla typiska problem som kan uppstå på tentan. En riktig tenta skulle betså av mindre antal uppgifter, typiskt 8:

1) en sats med bevis,2) gränsvärde 3) kontinuitet, 4) derivering, 5) extrempunkter, 6) Taylorutveckling, och två problem i analytisk geometri: 7) att skriva ekvationer till given geometri, och 8) att få fram geometriska parametrar från givna ekvationer till plan, linjer os.v.

Jag skrivit här lite mera varianter typiskt två ibland fyra av varje typ.

Plus: man måste kunna formuleringar av alla definitioner och satser från ”långa listan”!

1. **Sats**

   a) Formulera och bevisa Rolles sats. (4p)

   b) Ange och bevisa formeln för derivata av produkt av två funktioner. (4p)

2. **Gränsvärde.**

   a) Beräkna gränsvärde.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2}{1-\cos(x)} \qquad (4p)$$

   b) Beräkna gränsvärde.

   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} \qquad (4p)$$

   c) Beräkna gränsvärde.

   $$\lim_{x\to(1/2)} \left(\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}\right) \qquad (4p)$$

3. **Kontinuitet**

   a) Ange definitionen av en funktion f kontinuerlig i punkt a i fall f är definierad på ett intervall $(a-h, a+h)$. (4p)

   Bestäm alla punkter där en funktion given av sin graf är: a) kontinuerlig, b) vänsterkontinuerlig, c) högerkontinuerlig, d) diskontinuerlig.

   b) Ange hur funktionen f kan utvidgas till punkten $a=0$ (definieras i punkten $a=0$) så att den blir kontinuerlig i fall det är möjligt. f är ursprungligen definierad för $-1<x<+\infty$ och $x\neq 0$ med formeln

   $$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}. \qquad (4p)$$

4. **Derivering**

   a) Beräkna derivatan till funktionen

   $$f(x) = \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\ln(x)+\exp(-x^2)} \qquad (4p)$$

   b) Beräkna derivatan $\left(f^{-1}\right)'(y_0)$ av inversa funktionen f^{-1} till funktionen

   $$f(x) = \frac{4+x^3}{1+x^4}$$

   i punkten y_0 där $y_0 = f(x_0) = 2$ för $x_0 = 1$. (4p)

5. **Extrempunkter.**

   a) Ange definition på lokal extrempunkt. Bestäm alla lokala extrempunkter och absolut maximum och absolut minimu (om de existerar) till funktionen

   $$g(x) = x^2\exp(-x^2) \qquad (4p)$$

   på intervallet $[-\infty, \infty]$.

b) Ange definition på lokal extrempunkt. Bestäm alla lokala extrempunkter och absolut maximum och absolut minimu (om de existerar) till funktionen

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (4p)

på intervallet $[-2, 5]$.

c) Bestäm alla lokala extrempunkter och absolut maximum och absolut minimu (om de existerar) till funktionen

$g(x) = \begin{cases} x(x-1), & 0 \leq x \leq 2 \\ x(x+1), & -4 \leq x \leq 0 \end{cases}$ på dess definitionsmängd. (4p)

6. **Taylorsutveckling och linjär approximation**

a) Ange Taylorsutveckling av ordning 3 i punkten $a = 0$ av funktionen

$f(x) = \arcsin(x)$. (4p)

b) Ange Taylorsutveckling av ordning 3 i punkten $a = 1$ av funktionen

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (4p)

c) Ange linjär approximation runt punkten $a = 0$ och allmän form på felet för funktionen $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Ange uppskattningen av felet i den approximationen för $x = 0.2$. (4p)

7. **Att skriva ekvationer till geometriska objekt.**

a) skriv en ekvation för planet som går genom punkten P med koordinater $(+7, -5, +1)$ och skär av koordinataxlarna likadana positiva sträckor. (4p)

b) Bestäm om följande fyra punkter ligger i samma plan. $(3, 1, 0)$, $(0, 7, 2)$, $(-1, 0, -5)$, $(4, 1, 5)$. (4p)

c) Ange ekvationen för projektionen av skrningslinen av planen $x - 4y + 2z - 5 = 0$ och $3x + y - z + 2 = 0$ på planet $2x + 3y + z - 6 = 0$.

8. **Att undersöka geometri som svarar mot givna ekvationer**

a) Ange vilka sträckor som planet med ekvation $2x - 3y - z + 12 = 0$ skär av koordinataxlarna. (4p)

b) Beräkna avståndet mellan punkten med koordinater $(+3, +1, -1)$ och planet med ekvationen $22x + 4y - 20z - 45 = 0$

c) Beräkna vinklar mellan planen med ekvationer: $3x - y + 2z + 15 = 0$ och $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

d) Beräkna avståndet mellan två icke parallella linjer som saknar gemensamma punkter:
$\dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{1}$ och $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z-2}{2}$.

Tips! Börja lösa uppgifter på tentan från den som verkar vara lättats, sen ta den som känns vara näst lättast o.s.v.

Listan av satser för vilka man måste kunna bevis.

(De finns också markerade i totala tabellen med alla begrepp, satser och typiska problem)

1. Satsen om gränsvärde av summa funktioner , Ex.4, sid. 88
2. Formeln för derivata av prodikt av funktioner, Th. 3, sid. 108,
3. Formeln för derivatan av inversa funktion sid. 166 (lär beviset från anteckningar, det är enklare än i boken)
4. Gränsvärde $sin(x)/x$ då $x \to 0$, Th. 8, sid 119
5. Rolles' sats (med bevis): kap. 2.6, Th. 15, sid. 129
6. Feluppskattning för linjär approximation, kap.4.7, Th. 9, sid. 254.
7. Gränsvärdet av $(1 + 1/n)^n$ då $n \to +\infty$, kap. 3.4, Th. 6, sid. 184.

Facit.

1. Kolla bevis i boken.

2. **Gränsvärde.**

   a) 2

   b) 0

   c) 6

3. **Kontinuitet**

   a) En funktion f är kontinuerlig i en punkt a på från ett öppet intervall i definitionsmängden till f i fall $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

   En funktion f är kontinuerlig i de punkter x där grafen är en oavbruten kurva. Den typ av argument kan användas för funktioner givna med hjälp av grafisk information. f är vänsterkontinuerlig i de punkter x_0 där vänstergränsvärdet av f är samma som $f(x_0)$. Det betyder att vi kommer från vänster längs grafen oavbrutet till punkten med koordinater x_0, $f(x_0)$. På samma sätt identifierar man från grafen punkterna där funktionen f är högerkontinuerlig. I fall funktionen är både höger och vänsterkontinuerlig i punkten x_0 , är den också kontinuerlig i den punkten.

   b) Funktionen f är odefinierad i punkten $x = 0$. I övriga punkter $0 < x < \infty$ är den kontinuerlig. Gränsvärdet av funktionen $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ då $x \to 0$ är lika med 1,. Det gör att om vi definierar $f(0) = 1$ så blir funktionen f kontinuerlig i den punkten. Gränsvärdet av $f(x)$ i $x = 0$ beräknas lätt om man kommer ihåg eller beräknar själv Taylors polynom till $\ln(1+x)$ i noll: $\ln(1+x) = 1 + x + O(x^2)$ då $x \to 0$.

4. **Derivering** a) Det är kvitregeln, produktregeln och kedjeregeln som testas här samtidigt.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{\sin(x)}}{\ln(x)+\exp(-x^2)}\right) = \frac{\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}\Big[\ln(x)+\exp(-x^2)\Big] - \Big[\frac{1}{x} - 2x\exp(-x^2)\Big]\sqrt{\sin(x)})}{\Big[\ln(x)+\exp(-x^2)\Big]^2}$$

   b) Allmän formel är $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. För givet exempel $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4+x^3}{1+x^4}\right) = \dfrac{3x^2(1+x^4) - 4x^3(4+x^3)}{(1+x^4)^2}\Big|_{x=1} = \dfrac{(3(2)-20)}{(2)^2} = \dfrac{-14}{4} = \dfrac{-7}{2}$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(\frac{-2}{7}\right) \qquad \text{(4p)}$$

5. **Extrempunkter.**

   a) absolut minimum 0 i $x = 0$; absolut maximum $1/e$ i punkter $x = 1$ och $x = -1$.

   b) absolut minimum -16 i endpunkten $x = -2$; lokalt maximum 4 i punkten $x = 0$; lokalt minimum 0 i punkten $x = 2$; absolut maximum 54 i punkten $x = 5$.

   c) absolut minimum $-1/4$ i punkterna $x = \pm 1/2$; lokalt maximum 0 i singulära punkten $x = 0$; lokalt maximum 2 i endpunkten $x = 2$; globalt maximum 12 i endpunkten $x = -4$.

6. **Taylorsutveckling och linjär approximation**

   a) $f(x) = \arcsin(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)$

   b) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{3}(x-1) + \dfrac{2}{9}(x-1)^2 - \dfrac{14}{81}(x-1)^3 + O((x-1)^4)$

   c) Linjär approximation är konstant i det fallet: $f(0.2) \approx 1$ eftersom derivatan av f i noll är noll:

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Andra derivatan $f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ är en avtagande funktion för $x > 0$. Det gör att man kan uppskatta feltermen: $1/2f''(s)x^2 = 1/2\left(\frac{1}{(1+s^2)\sqrt{1+s^2}}\right)x^2$ med dess värde vid $s = 0$ för vilket feltermen är maximal.

Feltermen uppskattas av $1/2x^2$ för $0 < s < x$.

Detta medför att $|f(0.2) - 1| \leq 1/2(0.2)^2 = 0.02$

7. **Att skriva ekvationer till geometriska objekt.**

   a) $x + y + z - 3 = 0$

   b) Nej

   c) Linjen uppfyller ekvations systemet $4x - 3y + z - 3 = 0$; $2x + 3y + z - 6 = 0$. Det är sjärningslinje av projektionsplanet och planet genom givna linen som är vinklerät mot projektionsplanet. Svaret kan formulera på olika sätt men det svaret är kanske lättast.

8. **Att undersöka geometri som svarar mot givna ekvationer**

   a) -6; 4; 12

   b) 3/2.

   c) 90 grader

   d) 7