

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

Betygsgränser, ev bonuspoäng inräknad: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar publiceras på kursens hemsida första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm de gemensamma punkterna till planen (2p)

$$2x + y = 3, \quad y + 2z = 1 \text{ och } x + y + z = 2.$$

b) Bestäm alla reella x som uppfyller olikheten $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$. (2p)

c) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 = 2$ i punkten $(1, 1)$. (2p)

d) Lös ekvationen $z^3 = i$. Svaren ska ges på formen $a + bi$. (2p)

e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + e^x)^2}{3e^{2x}}$$

f) Ge exempel på en funktion f sådan att $f'(0)$ existerar, men inte $f''(0)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2.

3. Beräkna största värdet av funktionen $f(x) = \sqrt{1+x} - \frac{x}{2}$ ($x \geq -1$). (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$. (6p)

Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

5. Ett 2 m högt staket löper parallellt med ett höghus, på 1 m avstånd från huset. Hur lång är den kortaste stege som når husväggen från marken och över staketet? (6p)

Var god vänd!

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du (6p)
behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar
-1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

- a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är växande på ett intervall I så är också $f(x) + g(x)$
växande på I .
- b) Varje deriverbar funktion är kontinuerlig.
- c) Om $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$ och $g(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$, så måste
 $f(x) - g(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$.
- d) Triangeln med hörn i punkterna $(-3,0,-1)$, $(-1,-1,1)$ och $(1,6,-2)$ är rät-
vinklig.
- e) Om f är en funktion som är deriverbar på $[a, b]$ och $f(a) < f(b)$ så
finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att $f'(c) > 0$.
- f) $\frac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$.

7. a) Definiera derivatan av en funktion f i en punkt a . (6p)
b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Beräkna $f'(x)$ då $x \neq 0$.

Samma funktion f åsyftas i uppgift c och d:

- c) Visa med hjälp av derivatans definition att $f'(0) = 0$.
- d) Visa att f' ej är kontinuerlig i $x = 0$.

Go n'eirí an bóthar libh !
/Peter

Lösningar

- 1.(a) Man ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y = 3 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Det visar sig då att en av ekvationerna är överflödigt och man får en
enparametrisk lösning (dvs de tre planen skär varandra i en linje):

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

- (b) Då $x < 3$ är nämnaren positiv så tecknet hos kvoten är detsamma som tecknet hos täljaren som i sin tur är icke-negativ då $x \geq -2$. M.a.o. är kvoten icke-negativ då $-2 \leq x < 3$. Då $x > 3$ är nämnaren negativ varför kvoten är icke-negativ då täljaren är icke-positiv, dvs då $x \leq -2$. Men det finns inga tal som är både större än 3 och mindre än eller lika med -2. Sammantaget konstaterar vi att det angivna uttrycket är icke-negativt då $-2 \leq x < 3$.

- (c) Via implicit derivering följer att

$$3x^2 + 3y^2y' = 0$$

ur vilket det snabbt följer att

$$y' = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Således är $y'(1) = -1$ och eftersom tangentlinjen passerar genom (1,1) måste den ha ekvationen

$$y = 2 - x.$$

- (d) Vi har

$$z^3 = i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)}$$

vilket ger

$$z = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3})},$$

dvs

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = e^{i\frac{9\pi}{6}}$$

dvs

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, z_3 = -i.$$

- (e) Eftersom $\sqrt{4x^2 + 1} = |2x|\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}$ gäller att det första gränsvärdet är 2 och det andra är -2. För det tredje, observera att $(x + e^x)^2 = e^{2x} + 2xe^x + x^2$, kom ihåg att exponentiellt växande dominerar över polynomiellt och dra härav slutsatsen att det tredje gränsvärdet är $\frac{1}{3}$.

- (f) T.ex.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

2. Låt $A = (2, -1, 0)$, $B = (-1, -1, -1)$ och $C = (2, 1, 1)$. Låt $\vec{v} = \vec{AB}$ och $\vec{w} = \vec{AC}$. Vi söker alla vektorer av längd 5 som är rätvinkliga mot både $\vec{v}$ och $\vec{w}$. Notera först att $\vec{v} = (-1 - 2)\vec{i} + (-1 - (-1))\vec{j} + (-1 - 0)\vec{k} = -3\vec{i} - \vec{k}$,

och $\vec{w} = (2 - 2)\vec{i} + (1 - (-1))\vec{j} + (1 - 0)\vec{k} = 2\vec{j} + \vec{k}$. Vektorn $\vec{v} \times \vec{w}$ är rätvinklig mot både $\vec{v}$ och $\vec{w}$. Vi har att

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2]\vec{i} - [(-3) \cdot 1 - (-1) \cdot 0]\vec{j} + [(-3) \cdot 2 - 0 \cdot 0]\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Denna vektor har längd $\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$. Vi söker alla vektorer av längd 5 som är parallella med denna vektor. Det finns alltså två st. som ges av

$$\pm \frac{5}{7} (2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}).$$

Skalärprojektionerna av dessa på $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ges då av

$$\pm \frac{5}{7} \frac{(2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}{|\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}|} = \pm \frac{5}{7} \left(\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right) = \mp \frac{5}{7\sqrt{3}}.$$

3. Det gäller att

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}$$

som är 0 precis då $\sqrt{1+x} = 1$, dvs då $x = 0$. Eftersom man via inspektion ser att $f'(x)$ är positiv då $x < 0$ och negativ då $x > 0$ följer att f antar sitt minsta värde för $x = 0$. Eftersom $f(0) = 1$ är alltså f 's minsta värde just 1.

4. Observera att

$$f(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

ur vilket man snabbt ser att

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty.$$

Därför har f lodräta asymptoter $x = -1$ och $x = 1$. Dessutom gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

och

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0$$

ur vilket man ser att f har den sneda asymptoten $y = x$, både då $x \rightarrow \infty$ och då $x \rightarrow -\infty$.

5. Den kortaste stegen som når från marken till husväggen över staketet ligger, då den står uppställd, naturligtvis an mot staketet. Betrakta nu en stegen som står uppställd på detta sätt, dvs står uppställd med ena änden på marken och andra änden mot husväggen och ligger an mot staketet. Låt θ beteckna den vinkel som bildas mellan husväggen och stegen, vilket förstås är samma vinkel som den som bildas mellan staketet och stegen. Låt $L(\theta)$ beteckna längden av stegen. Vi vill finna $L(\theta)$'s minsta värde. Per definition av de elementära trigonometriska funktionerna och det faktum att staketet är 2m högt och beläget 1m från huset gäller att

$$L(\theta) = \frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta}.$$

Av situationen är det uppenbart att minimum ska sökas där L har en kritisk punkt. Det gäller att

$$L'(\theta) = \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2 \sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = 0$$

precis då

$$2 \sin^3 \theta = \cos^3 \theta$$

dvs då

$$\tan \theta = \frac{1}{2^{1/3}}.$$

Det är en standardövning att via en enkel figur av en rätvinklig triangel inse att om $\tan t = 1/a$ och $t \in (0, \pi/2)$ så gäller att

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \sin t = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Tillämpa detta med $t = \theta$ och $a = 2^{1/3}$ m sätt in i uttrycket för L och få att längden för den kortaste stegen är

$$\frac{2\sqrt{1+2^{2/3}}}{2^{1/3}} + \sqrt{1+2^{2/3}} = (1+2^{2/3})\sqrt{1+2^{2/3}} = (1+2^{2/3})^{3/2}.$$

Svaret är alltså att den kortaste stegen som når från marken till väggen över staketet är $(1+2^{2/3})^{3/2}$ meter (vilket i siffror blir cirka 4.16 meter).

- 6.(a) Sant, ty om $x < y$ så är ju $f(x) < f(y)$ och $g(x) < g(y)$ ur vilket det följer att $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$.
- (b) Sant, ty om $f'(a)$ existerar gäller att

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} h \right) = f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

- (c) Falskt, t.ex. om $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \frac{1}{2x}$.
- (d) Sant; vinkeln vid punkten $(-3, 0, 1)$ är rät, ty de två vektorer som representeras av de två vektorerna med denna punkt som fot och triangelns övriga två hörn som ändpunkter är $(2, -1, 2)$ och $(4, 6, -1)$ och skalärprodukten av dessa två vektorer är $8 - 6 - 2 = 0$.
- (e) Sant, ty enligt medelvärdessatsen finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

- (f) Falskt, ty för $x < -1$ är $x^2 + x$ positivt varför $|x^2 + x| = x^2 + x$ som har derivata $2x + 1$. Men då $x < -1$ är ju $2x + 1$ negativt, så $|2x + 1| \neq 2x + 1$.

7.(a) Derivatan av en funktion f i punkten a ges av

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

då detta gränsvärde existerar (och är ändligt).

- (b) Då $x \neq 0$ gäller att

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}.$$

- (c) Enligt (a) gäller det att visa att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Men $|f(h)/h| = |h \sin \frac{1}{h}| \leq |h| \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$ så detta följer av inklämningssatsen.

- (d) Enligt (b) saknar $f'(x)$ gränsvärde i $x = 0$.