MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik förZ1, (TMV120)
Tid: 2007-08-29, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakter: Anna Nyström
tel 0762- 721 860
Peter Hegarty
tel 0733-428321

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 29/8 em.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Ange alla komplexa tal z sådana att $\text{Re}(z) = 2\,\text{Im}(z)$ och $|z| = \sqrt{5}$. (2p)

   b) Ange största och minsta värde för funktionen $f(x) = \sqrt{(3 + 2\cos x)}$. (2p)

   c) Låt $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$. Ange en vektor $\boldsymbol{v}$ sådan att triangeln med $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som två av sina sidor har arean 1. (2p)

   d) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

   e) Ange följande gränsvärden: (3p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}$

   ii. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{(x-1)^3 - x(x-2)^2}{(x+1)^2}$

   iii. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x+3)}{\ln(x^2+1)}$

   f) Funktionen $f(x)$ ges implicit av ekvationen $\cos(x) + \sin(f(x)) = 1$ och $f(\pi/3) = \pi/6$. Ange $f'(\pi/3)$ och $f''(\pi/3)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 5, 7)$ och $C = (1, 5, 5)$.

   a) Beräkna arean av triangeln med hörn i A, B och C. (2p)

   b) Bestäm alla vektorer av längd 5 som är ortogonala med planet som spänns upp av A, B och C. (2p)

   c) Ange en vektor vars skalärprojektion på vektorn $2\vec{AB} - \vec{AC}$ är lika med 1/7. (2p)

3. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln\left|x^2 + 6x + 5\right|$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.) (6p)

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

5. Bestäm radie och omkrets för den cirkelsektor (dvs "tårtbit") av area 1, som har minst omkrets. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om funktionen $f(x)$ är deriverbar på (a,b), $x_0 \in (a,b)$ och $f'(x_0) = 0$, så har f antingen att lokalt minimum eller ett lokalt maximum i x_0.

   b) För varje komplext tal z gäller att $\operatorname{Im}(z + \bar{z}) = 0$.

   c) Om $\lim_{x\to a-} f(x)$ och $\lim_{x\to a+} f(x)$ båda existerar, så gäller att $\lim_{x\to a-} f(x) \leq \lim_{x\to a+} f(x)$.

   d) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$ för alla vektorer $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$.

   e) För alla $x \in [-1, 1]$ gäller att $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

   f) Om funktionen f och dess derivata är definierade för alla reella x utom $x = 0$ och om $f'(x) = 0$ för alla $x \in D_f$ så är f konstant.

7. a) Definiera begreppet: $f(x)$ har lokalt maximum i punkten x_0. (2p)

   b) Bevisa att om $f(x)$ är deriverbar i ett intervall (a,b) och har ett lokalt maximum i en punkt $x_0 \in (a,b)$ så är $f'(x_0) = 0$. (3p)

   c) Ge ett exempel på en funktion som inte är deriverbar för $x = 3$ och som har lokalt maximum för $x = 3$. (1p)

Herzlichen Glückwunsch!
/Peter

MATEMATIK
Chalmers

Lösningar

1.(a) Sätt $z := x + iy$. Villkoren är att $x = 2y$ och $x^2 + y^2 = 5$. Dessa ekvationer har två lösningar $(x, y) = \pm(2, 1)$. Alltså finns det två komplexa tal som uppfyller villkoren, nämligen $\pm(2 + i)$.

(b) Eftersom $-1 \leq \cos x \leq 1$ för alla x så gäller att $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$ för alla x. Så största och minsta värde för f är $\sqrt{5}$ resp. 1.

(c) Låt $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$. Jag ska härleda den ällmänna ekvationen som a, b, c måste uppfylla, även om bara ett exempel sökes och kan hittas på ett enklare sätt. Arean av triangeln med sidor $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ges av $\frac{1}{2}|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$. Vi har

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -b\boldsymbol{i} + (a - c)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k},$$

sådan att

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + b^2 + (a - c)^2}.$$

Alltså är triangelns area lika med 1 om och endast om

$$2b^2 + (a - c)^2 = 4.$$

Då ser vi att det finns oändligt många möjligheter för $\boldsymbol{v}$. Det enklaste valet är nog $a = 2, b = c = 0$, dvs $\boldsymbol{v} = (2, 0, 0)$. Denna triangel är likbent, med bas av längd 2, ben av längd $\sqrt{2}$ och basvinklar $\pi/4$.

(d) Efter Gausselimination visar det sig att den tredje ekvationen är överflödig och att systemet kan reduceras till

$$2x + 3y = 5, \quad -y + z = 1.$$

Låt z vara den fria variabeln, så får man en enparametrig lösning

$$\begin{cases} x &= 4 - 2t \\ y &= t - 1 \\ z &= t \end{cases}$$

(e) För **(i)** skriver vi om det givna uttrycket så här :

$$\frac{\sin 4x}{\tan 5x} = \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} \cdot \frac{4}{5}.$$

Då $x \to 0$ så går båda de två första kvoten mot ett, så svaret blir 4/5.

För **(ii)** så kan vi först utveckla täljaren till $x^2 - x - 1$. Vi får samma g.v. om vi bara tar kvotet mellan de högsta potenserna i täljaren och nämnaren, dvs $x^2/x^2 = 1$. Så svaret är 1.

För **(iii)** konstaterar vi att det givna kvotet har samma g.v. som $\frac{\ln x}{\ln x^2} = \frac{\ln x}{2\ln x} = \frac{1}{2}$. Svar : 1/2.

(f) Deriverar vi implicit m.a.p. på x så får vi

$$-\sin x + \cos(f(x)) \cdot f'(x) = 0. \tag{1}$$

Deriverar man implicit en gång till får man

$$-\cos x - \sin(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 + \cos(f(x)) \cdot f''(x) = 0. \tag{2}$$

Först innebär (1) att

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos(f(x))}.$$

Stoppa in $x = \pi/3$ så får vi då att

$$f'(\pi/3) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/6)} = 1. \tag{3}$$

PSS, innebär (2) att

$$f''(x) = \frac{\cos x + \sin(f(x)) \cdot [f'(x)]^2}{\cos(f(x))}$$

Stoppa in $x = \pi/3$ och resultatet av (3) så erhålls

$$f''(\pi/3) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. (a) Låt $\boldsymbol{v} = \vec{AB}$ och $\boldsymbol{w} = \vec{AC}$. Då är $\boldsymbol{v} = (3-1)\boldsymbol{i} + (5-2)\boldsymbol{j} + (7-3)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, och $\boldsymbol{w} = (1-1)\boldsymbol{i} + (5-2)\boldsymbol{j} + (5-3)\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Triangelns area ges av $\frac{1}{2}|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|$. Vi beräknar först

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= [3 \cdot 2 - 4 \cdot 3)]\boldsymbol{i} - [(2 \cdot 2 - 4 \cdot 0]\boldsymbol{j} + [2 \cdot 3 - 3 \cdot 0]\boldsymbol{k} = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.$$

Därmed är

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{22}.$$

(b) Vi söker alla vektorer av längd 5 som är parallella med $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$. Det finns två sådana vektorer och från (a) ser vi att de ges av

$$\pm\frac{5}{2\sqrt{22}}(-6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}) = \pm\frac{5}{\sqrt{22}}(-3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}).$$

(c) Låt $\boldsymbol{u} := 2\vec{AB} - \vec{AC} = 2(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) - (3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$. Skalärprojektionen av en godtycklig vektor $\boldsymbol{f} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ på denna ges av

$$\frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}}{||\boldsymbol{u}||} = \frac{4a + 3b + 6c}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{4a + 3b + 6c}{\sqrt{61}}.$$

Alltså funkar vilken vektor som helst för vilken $4a + 3b + 6c = \frac{\sqrt{61}}{7}$. T.ex. tag $\boldsymbol{f} = \frac{\sqrt{61}}{28}\boldsymbol{i}$.

3. Notera att $f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$ medan att $f(x) \to +\infty$ då $x \to -\infty$. Dessutom är $f(x) \geq 0$ för alla x ty $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ är en kvadrat och e^{-x} är alltid positiv.

   Allt detta medför direkt att värdemängden är $[0, \infty)$.

4. Notera att $x^2+6x+5 = (x+1)(x+5)$ är en parabel med rötter i $x = -1$ och $x = -5$ och ett minimum i $x = -3$. Tar vi absolutbeloppet så speglas den delen av parabeln mellan rötterna genom x-axeln till det övre halvplanet. Eftersom $\ln x$ är definierad bara för $x > 0$ och $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ så kommer f att ha lodrätta asymptoter i $x = -1$ och $x = -5$ och

$$\lim_{x\to -5\pm} f(x) = \lim_{x\to -1\pm} f(x) = -\infty.$$

   Dessutom kommer f att ha en lokal maximum i $x = -3$ där $f(-3) = \ln 4$ och det är klart att $f(x) \to +\infty$ då $x \to \pm\infty$. Så mycket räcker för att rita grafen.

5. Kalla radien för r och vinkeln i tårtbiten för θ. Då ges arean av $\frac{1}{2}r^2\theta$ så det är givet att

$$\frac{1}{2}r^2\theta = 1. \tag{4}$$

   Omkretsen är också en funktion av r och θ. Beteckna denna funktion med $f(r, \theta)$. Omkresten består av två radier och en cirkelbåge så vi har att

$$f(r, \theta) = 2r + r\theta. \tag{5}$$

   Men (4) medför att $\theta = 2/r^2$ så från (5) kan vi skriva omkretsen som en funktion av enbart r, nämligen

$$f(r) = 2r + 2/r = 2(r + 1/r).$$

Vi söker ett minimum för f, så vi ansätter

$$0 = f'(r) = 2(1 - 1/r^2),$$

som har den unika lösningen $r = 1$ ($r = -1$ är uppenbarligen inte en godtagbar lösning, ty radien måste vara positiv). Då ges den minsta omkretsen av $f(1) = 4$.

6.(a) Falskt. x_0 kan också vara en inflektionspunkt, t.ex. tag $f(x) = x^3$, $a = -1, b = +1$ och $x_0 = 0$.

(b) Sant. $z + \overline{z} = 2\Re(z)$ för alla z.

(c) Falskt, t.ex. tag $a = 0$ och

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x < 0, \\ -1, & \text{om } x \geq 0. \end{cases}$$

(d) Falskt. Snarare gäller att $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$.

(e) Sant. Detta är en omformulering av faktumet att, för alla vinklar θ så gäller att $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

(f) Falskt, t.ex. samma funktion som i (c) ovan men med $f(0)$ lämnat odefinierat.

7.(a) Det innebär att f är definierad i någon öppen intervall I kring $x = x_0$ och att $f(x) \leq f(x_0)$ för alla $x \in I$.

(b) Se Sats 2, avsnitt 4.2 i Adams.

(c) T.ex. $f(x) = -|x - 3|$. Notera att denna f har faktiskt ett globalt maximum i $x = 3$.