Tentamen i Inledande matematik för I1, E1, A1 och V1 2007-10-26
Svar eller Lösningar

1 **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** $x \le 0,\ 1 \le x < 3$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** Systemet saknar lösning

e) i. $\frac{2}{3}$ ***ii.*** e^6 iii. 1 **f)** $(x, y) = (1,-1)$, lokalt maximum.

2. **a)** Bilda två vektorer i planet, till exempel $v_1 = (1,2,3)-(-1,3,4) = (2,-1,-1)$ och $v_2 = (3,5,-1)-(-1,3,4) = (4,2,-5)$. En normalvektor till planet ges då av $v_1 \times v_2 = (7,6,8)$ och med hjälp av till exempel punkten $(1,2,3)$ får man planets ekvation till $7x+6y+8z=43$

b) En riktningsvektor till linjen är $r_1 = (1,-1,0)-(-3,-2,-1) = (4,1,1)$ och en ekvation

för linjen blir därför $\begin{cases} x = 4t+1 \\ y = t-1 \\ z = t \end{cases}$

Skärningen mellan linjen och planet får man genom att sätta in linjens komponenter i planets ekvation: $7(4t+1)+6(t-1)+8t=43 \iff t=1$ varför skärningspunkten är $(5,0,1)$

3. Vi bestämmer först definitionsmängden till $f(x)=\ln(x^3-2x^2)-x$; vi måste ha $x^3-2x^2>0$ vilket leder till att $x>2$.

Vidare har vi att $f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}-1=\frac{5x-4-x^2}{x(x-2)}=\frac{(x-1)(x-4)}{x(2-x)}$ samt att $f(x)\to-\infty$ *då* $x\downarrow 2$ respektive då $x\to\infty$.

Teckentabell:

x	2		4	
f'		+	0	−
f	$-\infty$	$\uparrow$	$\ln 32-4$	$\downarrow$

Vi ser att värdemängden är $=\{y\in\Re;\ y\le \ln 32-4\}$

4. Vi skall rita grafen till $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Definitionsmängden är alla x sådana att $x\ne\pm1$

Låt $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ så blir $y'=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ som är $=0$ när $x=0$ samt när $x=\pm\sqrt{3}$

Gränsvärden: $x\uparrow-1 \Rightarrow y\to-\infty$, $x\downarrow-1 \Rightarrow y\to\infty$, $x\uparrow1 \Rightarrow y\to-\infty$, $x\uparrow1 \Rightarrow y\to\infty$, $x\to-\infty \Rightarrow y\to-\infty$, $x\to\infty \Rightarrow y\to\infty$

Vidare är $f(0)=0$, $f(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

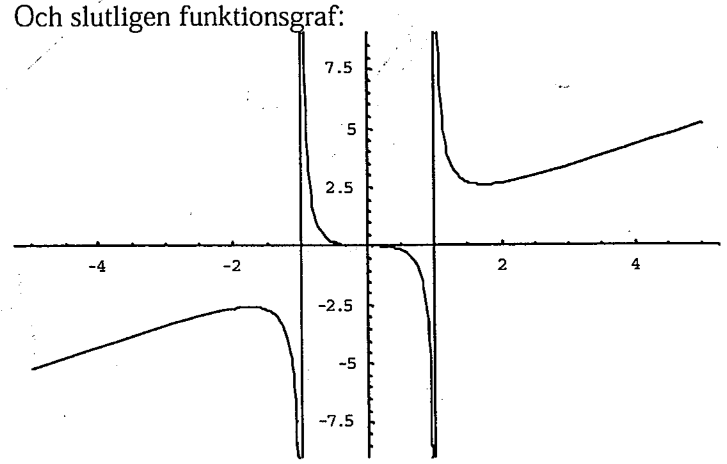
Vi har lodräta asymptoter i $x=1$ respektive $x=-1$

Och eftersom $\frac{y}{x}\to1$ när $x\to\infty$, och $y-x=\frac{x^3-x(x^2-1)}{x^2-1}\to0$ när $x\to\infty$, blir $y=x$ en sned asymptot (samma gränsvärden gäller då $x\to-\infty$).

Teckentabell:

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'	+	0	−		−	0	−		−	0	+
y	$\uparrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	$-\infty/\infty$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\infty/\infty$	$\downarrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow$

Och slutligen funktionsgraf:



5. Välj punkten $(1,1,4)$ på linjen. Vi kan då teckna avståndet som $d=\frac{|r\times v|}{|v|}$ där $r=(1,0,-1)$ och $v=(a,-1,1)$. Här blir $r\times v=-(1,1+a,1)$ och $d^2=\frac{a^2+2a+3}{a^2+2}$.

Sätt $f(a)=\frac{a^2+2a+3}{a^2+2}$; uppgiften blir att hitta minsta värde till denna funktion.

$f(a)$ är definierad för alla a och $\to1$ när $a\to\pm\infty$

$f'(a)=\frac{(2a+2)(a^2+2)-2a(a^2+2a+3)}{(a^2+2)^2}$ som är $=0$ när $a=1$ samt när $a=-2$.

Vi har $f(1)=\frac{6}{3}=2$ och $f(-2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Funktionen har uppenbarligen ett minimum i $a=-2$ (avståndet mellan den givna punkten och just den linjen blir $=\frac{1}{\sqrt{2}}$)

6. **a)** S **b)** F **c)** F **d)** F **e)** S **f)** S

7. För **a)** och **b)**, se boken. För **c)** ta till exempel $f(x)=x^3$