

kan vi skriva ihop summan i högerledet till sinus av en förskjuten vinkel (φ kallas fasförskjutning). Två tal c, d kan uppfattas som cosinus resp. sinus av en och samma vinkel om och endast om $c^2 + d^2 = 1$. Ifall den likheten gäller för a, b är man alltså framme. Det trick man tar till annars är att multiplicera och dividera med $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ (konstanten A kallas amplitud). Koefficienterna $\frac{a}{A}, \frac{b}{A}$ kan nu tolkas som cosinus och sinus av en vinkel.

Låt oss nu lämna det generella åt sidan och titta på exemplet vi hade; i vårt fall är $a = 1$ och $b = 1$. Vi multiplicerar och dividerar med $A = \sqrt{2}$ och får

$$g(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right).$$

Eftersom $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, får vi

$$g(x) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Vi ser nu att $|g(x)| = |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$, och det följer att $2 - (\sin x + \cos x) \geq 2 - \sqrt{2} > 0$. Nämnaren kan alltså aldrig bli lika med noll för reella x , vilket betyder att funktionen f är definierad i hela $\mathbb{R}$. $\square$

I de båda exemplen ovan får vi en uppskattning för själva f på köpet. Eftersom nämnaren alltid är positiv är även f positiv, så vi behöver inte skriva belopptecken. Funktionen f kommer att vara som störst när nämnaren är som minst (notera att täljaren är konstant). Det betyder att funktionen från det sista exemplet uppfyller $0 < f(x) \leq \frac{1}{2-\sqrt{2}}$. Läsaren kan själv fundera över hur motsvarande olikheter ser ut i exemplet innan, både med den "grövre" och den "finare" uppskattningen av nämnaren.

5.3.4 Rationella olikheter

I det som återstår av avsnittet kommer vi att ägna oss åt att lösa vissa typer av olikheter, där funktionerna som ingår i vänster- och högerledet är funktioner av en variabel.

Vi börjar med en mycket viktig iakttagelse: det är betydligt enklare att jämföra en storhet med noll, än att jämföra två storheter med varandra. Givet t.ex. olikheten $AB < 1$ kan vi inte säga så mycket om när den är sann eller falsk, medan givet $CD < 0$ kan vi genast säga att den är sann om och endast om C och D har olika tecken. Det betyder att man ska hålla sig till följande tumregel

Vid behandling av olikheter, flytta alltid över termer så att ena ledet blir 0.

Nästa steg (återigen för att kunna dra nytta av iakttagelsen ovan) är att försöka faktorisera i det led där icke-nolltermerna finns, och sedan helt enkelt undersöka när de olika faktorerna är positiva och negativa. Tyvärr kan faktoriseringen vara ganska svår att genomföra i praktiken.

Det kommer nu att uteslutande handla om olikheter mellan polynom och/eller rationella funktioner. Det kan därför vara på sin plats att repetera det som står i avsnitt 4.2 och avsnitt 4.3.

Olikheter mellan polynom har utseendet

$$p_1(x) < p_2(x),$$

där p_1, p_2 är polynom. Skillnaden mellan två polynom är återigen ett polynom. Efter att ha fört över alla termer till vänsterledet får vi därför olikheten

$$p(x) < 0,$$

där p är ett polynom. Vi kan nu (åtminstone i teorin) hitta p 's nollställten, faktorisera enligt faktorsatsen för polynom (se avsnitt 2.5) och undersöka de enskilda faktorernas tecken (i praktiken kan det vara knivigt att hitta nollställena). *Observera att vi endast är intresserade av reella nollställten, komplexa tal och olikheter går inte ihop (frågan diskuteras något utförligare i slutet av avsnittet).*

Sats. Alla polynom med reella koefficienter av grad minst ett kan faktoriseras i första- och andragsgradsfaktorer med reella koefficienter, där andragsgradsfaktorerna saknar reella nollställten.

(Vi bevisar inte satsen här.)

Det är lätt att bestämma förstagsgradsfaktorernas tecken. Om någon andragsgradsfaktor saknar reella nollställten innebär det att den har konstant tecken över hela tallinjen (kan du förklara varför?).

Om olikheten är icke-sträng kommer lösningsmängden även att innehålla alla nollställten till p . Vi illustrerar metoden med ett par exempel.

Exempel. Lös olikheten $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Lösning. Nollställena till $x^2 - 3x + 2 < 0$ är $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$. Olikheten är alltså ekvivalent med olikheten $(x-1)(x-2) < 0$. Produkten av de två faktorerna är negativ om och endast om de har olika tecken, vilket inträffar om antingen $x < 1$, $x > 2$, eller $x > 1$, $x < 2$. Den första kombinationen är omöjlig, alltså är lösningsmängden $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$. $\square$

Exempel. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är $2x^3 < 7x^2 + 5x - 4$?

Lösning. Vi för över alla termer till vänsterledet och får $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 < 0$. Ekvationen $2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 0$ har rötterna $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ och $x_3 = 4$ (visa detta!). Enligt faktorsatsen är då $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-4)$.

För att bestämma de x , för vilka $p(x) < 0$, kan vi sätta upp följande teckentabell:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$(x+1)$	---	0	+++	+	+++	+	+++
$(x-\frac{1}{2})$	---	-	---	0	+++	+	+++
$(x-4)$	---	-	---	-	---	0	+++
$p(x)$	---	0	+++	0	---	0	+++

Vi finner att $p(x) < 0$, om $x < -1$ eller $\frac{1}{2} < x < 4$. □

En olikhet mellan rationella funktioner har (efter att eventuellt ha skrivit termerna i vardera ledet på gemensam nämnare) utsett

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} > \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

där f_1, f_2, g_1, g_2 är polynom och x tillhör mängden $\{x \in \mathbb{R} : g_1(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0\}$. Vi börjar med att flytta över alla termer till vänsterledet; skillnaden mellan två rationella funktioner är återigen en rationell funktion, vilket betyder att det räcker att titta på olikheter på formen

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}. \quad (f, g \text{ polynom})$$

Den omedelbara, nästan instinktiva reaktionen när man ser olikheten ovan är att göra sig av med nämnaren, genom att förlänga med $g(x)$. *Det får man inte göra!* Det är nämligen så att $g(x)$ som regel växlar tecken, och man måste byta riktning på olikheten vid multiplikation med negativa storheter. En möjlighet är att i det läget undersöka g 's tecken för olika x -värden och lösa olika varianter av olikheten för $g > 0$ och $g < 0$. Detta är emellertid onödigt jobbigt; dessutom är det lätt att missa något fall och därmed lätt att få fel eller ofullständig lösningsmängd.

Istället noterar vi att kvoten $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ är positiv om och endast om täljaren och nämnaren har samma tecken; d.v.s. kvoten är positiv om och endast om produkten är positiv, så att olikheten som ska lösas är ekvivalent med

$$f(x)g(x) > 0, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}.$$

Man kan se det steget som att man förlänger med $g^2(x) > 0$. Nu kan man (i bästa fall) faktorisera och göra en tabell över faktorernas tecken. Om olikheten är icke-sträng kommer lösningsmängden även att innehålla alla nollställen till f (däremot aldrig nollställena till g !).

Exempel. För vilka reella x gäller olikheten

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0?$$

Lösning. För $x \neq -2$, förläng med $(x+2)^2$. Olikheten ovan är därmed för alla $x \neq -2$ ekvivalent med olikheten $(x-1)(x+2) \geq 0$. För att produkten ska vara positiv måste de två faktorerna ha samma tecken. Detta inträffar då $x < -2$ och då $x > 1$, alltså då $x < -2$ och då $x > 1$. Eftersom likheten är tillåten, måste vi lägga till punkten $x = 1$. Vi får alltså lösningsmängden $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ eller } x \geq 1\}$. (OBS! $x \neq -2$) $\square$

Exempel. För vilka x är $\frac{1}{x} \geq 2x - 1$?

Lösning. Olikheten kan skrivas:

$$R(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 - 2x^2 + x}{x} \geq 0.$$

$R(x)$ är en rationell funktion, där täljare (och nämnare) kan faktoruppdelas. Täljaren $T(x) = 1 - 2x^2 + x$ har nollställena $-\frac{1}{2}$ och 1 , varför $T(x) = (-2)(x + \frac{1}{2})(x - 1) = -(2x + 1)(x - 1) = (2x + 1)(1 - x)$ och $R(x) = (2x + 1)(1 - x)/x$.

Vi får följande teckentabell:

	$x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$2x + 1$	---	0	+++	+	+++	+	+++
$1 - x$	+++	+	+++	+	+++	0	---
x	---	-	---	0	+++	+	+++
$R(x)$	+++	0	---	ej def.	+++	0	---

Vi ser att $R(x) \geq 0$, om $x \leq -1/2$ eller $0 < x \leq 1$ (för $x = 0$ är $R(x)$ ej definierad).

Anmärkning: Man kan också skriva $R(x) = (-2)(x + \frac{1}{2})(x - 1)/x$ och bilda en teckentabell med faktorerna (-2) , $(x + \frac{1}{2})$, $(x - 1)$ och x . (Gör detta!).

Vi påminner om att den givna olikheten (i exemplet ovan) inte får multipliceras med x , d.v.s. den får inte skrivas $1 \geq x(2x - 1)$, eftersom x kan vara negativt. $\square$

5.3.5 Intervall

Vi ser att lösningsmängderna till de olikheter vi behandlat i $\mathbb{R}$ anges av olikheter av typerna $x < a$, $x > b$, $a < x < b$, $x \leq a$, $x \geq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$. Mängder som anges på det sättet förekommer mycket ofta. De har därför fått ett namn:

alla mängder av typerna ovan kallas **intervall**. Som redan nämnts i kapitel 1.4.1 är det lämpligt att införa beteckningar för de olika intervalltyperna som inte innehåller variabelnamnet (mängden är uppenbarligen densamma oavsett vad variabeln heter). Nedan repeteras definitionerna av alla intervalltyper.

$$\begin{aligned}(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \\(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \\[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \\[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \\[b, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}, \\(b, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > b\}.\end{aligned}$$

Vi ser att $[,]$ används då den avgränsande punkten (den s.k. randpunkten) inkluderas i intervallet, medan $(,)$ används då randpunkten ej inkluderas. Intervall som innehåller alla sina randpunkter kallas slutna intervall; sådana som ej innehåller någon av sina randpunkter kallas öppna. De övriga är varken slutna eller öppna. Notera att de båda oändligheterna är symboler som inte tillhör $\mathbb{R}$, därmed räknas de inte som randpunkter till intervallen. Intervallen $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[b, \infty)$ är alltså slutna, $(-\infty, a)$, (a, b) , (b, ∞) är öppna, övriga är varken slutna eller öppna. (I litteraturen förekommer även beteckningen $]a, b[$ för det öppna intervallet (a, b)).

Som en övning, ange lösningsmängderna i alla exempel i avsnittet i termer av intervall.

5.3.6 Komplexa tal och olikheter går inte ihop!

Vi inledde avsnittet med en kommentar om vad som gör det möjligt att överhuvudtaget behandla olikheter mellan reella tal och/eller funktioner: väsentligen handlar det om att det går att tala om vänster och höger, och därmed definiera riktning på tallinjen. Man säger att man har en ordningsrelation i $\mathbb{R}$. Vanan att arbeta med vissa begrepp och regler gör att man ofta tenderar att se dem som självklara och mer allmängiltiga än vad de i själva verket är. Det är därför på sin plats att här lyfta ett varningens finger:

Olikheter mellan komplexa tal och/eller funktioner har ingen mening!

Att det inte låter sig göras betyder inte att ingen hittills kommit på hur man ska göra, det betyder att man kan bevisa att det inte går att introducera en meningsfull ordningsrelation i mängden av komplexa tal. Eftersom uppskattningar fortfarande är ett mycket viktigt moment i analysen av komplexa storheter gäller det att komma ihåg att det enda man kan jämföra med olikhetstecken är komplexa tals och/eller funktioners absolutbelopp.

5.3.7 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 5c

1. För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller följande olikheter?

(a) $1 \geq 2x^2 - x$

(b) $x^2 + x < 1$

(c) $x^2 + 1 \leq x$

(d) $x^2 > 2x - 1$

(e) $x^3 + 2x > 3x^2$

(f) $6x^3 < 17x^2 + 4x - 3$

(g) $x + 3 \geq \frac{2x}{x-2}$

(h) $(x-1)^2 \leq \frac{3}{x+1}$

(i) $\frac{1}{x} < \frac{x}{2} < \frac{2}{x}$ (studera först de båda olikheterna var för sig).

2. Ange en andragsolsolikheter som har lösningsmängden

(a) $(-2, 3)$

(b) $[2, 5]$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ eller } x > 5\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ eller } x \geq 3\}$.

3. Ange en rationell olikhet som har lösningsmängden

(a) $(-2, 3)$

(b) $[-2, 3)$

(c) $(-2, 3]$

(d) $[2, 5]$

(e) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \text{ eller } x > 5\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ eller } x \geq 3\}$.

4. Vilka punkter i planet har koordinater som satisfierar följande olikheter?

(a) $x - 3y > 0$

(b) $2x + 3y \leq 4$

(c) $x^2 + y^2 > 8$

(d) $1 \leq x^2 + y^2 < 5$.

5. Visa att

$$t + \frac{1}{t} \geq 2$$

för alla $t > 0$. När uppnås likhet?

6. Avståndet mellan städerna A och B är 100 km. Två bilister startar från A samtidigt, kör från A till B , vänder direkt, och kör tillbaka till A . Den förste kör från A till B med farten 120 km/h; väl framme i B ser han en hastighetskontroll och kör tillbaka med 80 km/h. Den andre bilisten håller jämn fart 100 km/h. Vilken av de två bilisterna kommer tillbaka till A först?

Lös samma uppgift om den andre bilisten håller farten v km/h, medan den förste kör från A till B med farten v_1 km/h och tillbaka med v_2 km/h, där $v_1 + v_2 = 2v$. Om du lyckas har du kommit fram till olikheten mellan aritmetiskt och harmoniskt medelvärde (AM-HM):

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad \text{för alla } a, b > 0.$$

När uppnås likhet?

- (c) $v = n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
- 5.2.6 (a) $v = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
 (b) $v = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi, v = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$
 (c) $v = \pi + n \cdot 2\pi, v = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$
 (d) $v = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$
 (e) Saknar (reell) lösning
- 5.2.7 (a) $x = 6$ (b) $x = 3/2$ (c) Saknar reell lösning
 (d) $x = 0$ (e) $x = 3$
- 5.2.8 (a) $x = 0$ (b) $x_1 = 0, x_2 = 1$ (c) $x = -1$
- 5.2.9 (a) $x = e^3$ (b) $x = 1 + 4\sqrt{2}$ (c) $x = 8$
 (d) $x = 3$ (e) $x = (3 - \sqrt{5})/2$
- 5.2.10 (a) $x_1 = 0, x_2 = -2$ (b) $x_1 = 21/2, x_2 = -9/2$
 (c) $x = -4$
- 5.2.11 (a) $x_1 = 5/\sqrt{2}, x_2 = -3/2$ (b) Alla x där $-1 \leq x \leq 2$
 (c) $x = \log_2 3 \approx 1.585$ (d) $x = 1/\sqrt{2}$
- 5.3.1 (a) $[-\frac{1}{2}, 1]$;
 (b) $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$;
 (c) gäller ej för något x ;
 (d) alla reella $x \neq 1$;
 (e) alla reella x sådana att $x \in (0, 1)$ eller $x \in (2, \infty)$;
 (f) alla reella x sådana att $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ eller $x \in (\frac{1}{3}, 3)$;
 (g) alla reella x sådana att $x \in [-2, 2)$ eller $x \in [3, \infty)$;
 (h) $(-1, 2]$;
 (i) $(\sqrt{2}, 2)$.
- 5.3.2 (a) t.ex. $x^2 - x - 6 < 0$;
 (b) t.ex. $x^2 - 7x + 10 \leq 0$;

(c) t.ex. $x^2 - 3x - 10 > 0$;

(d) t.ex. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

5.3.3 (a) t.ex. $x^2 - x - 6 < 0$;

(b) t.ex. $\frac{x+2}{x-3} \leq 0$;

(c) t.ex. $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$;

(d) t.ex. $x^2 - 7x + 10 \leq 0$;

(e) t.ex. $\frac{x+2}{x-5} \geq 0$;

(f) t.ex. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

5.3.4 (a) alla punkter under den räta linjen med ekvation $x - 3y = 0$;

(b) alla punkter under den räta linjen med ekvation $2x + 3y = 4$;

(c) alla punkter utanför cirkelskivan med medelpunkt i origo och radie $2\sqrt{2}$ (den avgränsande cirkeln ingår heller inte);

(d) alla punkter i cirkelringen mellan cirklarna med medelpunkt i origo och radier 1 och $\sqrt{5}$, samt punkterna på cirkeln med medelpunkt i origo och radie 1.

5.3.5 Likhet uppnås om och endast om $t = 1$.

5.3.6 I båda fallen den andre bilisten. Likhet uppnås om och endast om $a = b$.

5.3.7 (a) 2;

(b) 4.

6.1.1 Tips: utnyttja allmänna konjugatregeln, se kapitel 1.9. Eller beräkna $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{2^n}$ för växande värden på n .

6.1.2 Skiss: Till varje $\epsilon > 0$ finns vinkel u med $0 < u < \frac{\pi}{2}$ så att $\sin u = 1 - \epsilon$. Sätt $\delta = \frac{\pi}{2} - u$. Då gäller att $1 - \epsilon < \sin v < 1$ om $0 < |v - \frac{\pi}{2}| < \delta$.

6.1.3 Tips: $T = (\cot v, 1)$. För $0 < v < \frac{\pi}{2}$ ger areorna av de tre områdena att $\cos v < \frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2} - v < \frac{\cos v}{\sin v}$.

6.1.4 (a) 1, tips: Sätt $3x = v$.

(b) $\frac{5}{2}$, tips: Sätt $5x = v$.

(c) -1, tips: Sätt $x - \frac{\pi}{2} = v$, då är $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\cos(v + \frac{\pi}{2})}{v}$

6.2.1