Sommarmatte

Matematiska Vetenskaper

15 mars 2009

Innehåll

Välkommen till Sommarmatte!

Detta material ska hjälpa dig förstärka dina matematikkunskaper från gymnasiet så du kan räkna obehindrat och koncentrera dig på det som är nytt när du kommer till högskolekurser.

Texten finns också på kursens webbplats

www.MatematiskaVetenskaper.se

Innehållet är liknande, så du kan ta med dig kompendiet i ryggsäcken eller läsa på skärmen. Kursen ger dig en repetition av de viktigaste momenten i gymnasiets matematik, med nya infallsvinklar som gör dig bättre förberedd för högskolans matematik.

Hur använder du materialet?

Börja med innehållsförteckningen. Känner du igen det mesta? Vet du vad du har ganska bra koll på och vad som kommer att kräva mer repetition för dig? Gör en realistisk tidsplan och sätt igång!

Texten är tätare skriven än vad de flesta gymnasieböckerna är. Lär du dig att läsa den, så har du kommit en bra bit mot att kunna studera i högskoleböcker. På många ställen har vi försökt presentera nya sidor hos kunskap som du redan besitter, så läs texten noga även om du klarar uppgifterna och provet. Då har du chansen att komma ett steg längre och få nya insikter.

Om du känner att du redan kan materialet i ett avsnitt kan du gå till övningarna först och testa dig. Du hittar facit sist i kurstexten. Går det bra, så kan du fortsätta med motsvarande prov på webben.

Känner du att du behöver grundligare repetition på ett avsnitt, eller att texten förutsätter saker som du inte kan, så är får du försöka få tag i någon annan utförligare lärobok.

Fastnar du med ett begrepp eller en uppgift, ställ en fråga på kursens “chat” eller kontakta vår support som hjälper dig att komma vidare!

Lycka till med Sommarmatten!

Sommarmatteteamet
Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet och Chalmers

1 Aritmetik och Algebra

I detta kapitel skall vi först arbeta med grundläggande aritmetik, alltså de fyra räknesätten, för olika typer av tal. Detta lägger en stabil grund för algebra, som här innebär grundläggande räkning med symboler vilket vi behandlar i slutet av kapitlet.

Alla räkneregler som används i algebraiska räkningar, har sin bakgrund i hur man räknar med tal. Alla reglerna kan därför förklaras genom att man utgår från aritmetiken. Ofta kan man utgå från ett exempel, om man samtidigt övertygar sig om att exemplet är allmängiltigt. Även om du kan vissa regler utantill, som ”*minus minus är plus*”, så vinner du i längden på att kunna förklara varför regeln gäller.

Vi rekommenderar att du *inte* använder räknare eller formelsamling då du löser uppgifterna. De kunskaper du får genom att dels räkna själv och tänka på vilka räkneregler du använder och dels lära dig en del fakta istället för att förlita dig på formelsamlingen, är oerhört värdefulla för dina fortsatta studier. I många matematikutbildningar förväntas du klara dig utan hjälpmedel.

1.1 Räkning med naturliga tal och heltal

De *naturliga talen* är talen $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$. (De tre avslutande punkterna i listan indikerar att mönstret fortsätter utan slut.) De *negativa heltalen* är $-1, -2, -3, -4, \cdots$. Ibland skriver man negativa tal med en parentes: $(-1), (-2), (-3), (-4), \cdots$.

I detta kapitel skriver vi minustecknet lite upphöjt för att det inte skall se likadant ut som subtraktionstecknet, så de negativa talen kommer att betecknas

$$^{-}1, {}^{-}2, {}^{-}3, {}^{-}4, \cdots .$$

Vi vill poängtera att det handlar om ett speciellt tal, eller en operation på ett tal, och inte subtraktion. Från och med kapitel 2 förekommer inte det upphöjda minustecknet. Naturligtvis kan du själv skriva som du är van. I proven på webben skall du t ex skriva -3.

De naturliga talen och de negativa talen bildar tillsammans *heltalen*

$$\cdots, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots .$$

Ett viktigt ord i det matematiska språket är begreppet *mängd*. I normalsvenska betyder ordet *ett stort antal* eller *en mätbar ansamling*. En matematisk mängd är en samling objekt, *element*. Så har t ex *mängden av de naturliga talen* som element naturliga tal. Talet 13 är ett element i mängden, liksom varje annat naturligt tal. Mängden av alla naturliga tal betecknas ofta $\mathbb{N}$. Med symboler skriver vi att 13 tillhör de naturliga talen som $13 \in \mathbb{N}$. Det faktum att ${}^{-}1$ inte är ett naturligt tal skrivs ${}^{-}1 \notin \mathbb{N}$.

På samma sätt talar man om mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$, mängden av alla negativa heltal $\mathbb{Z}_-$ och mängden av alla positiva heltal $\mathbb{Z}_+$. Notera att 0 varken är ett positivt eller ett negativt tal.

Om alla element i en mängd A också finns i en annan mängd B så säger vi att A är en *delmängd* till B vilket skrivs $A \subset B$. Vi har t ex att de naturliga talen är en delmängd till heltalen så $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.1.1 Naturliga tal

Par av naturliga tal kan adderas och det är en operation som redan små barn förstår. Det faktum att operationen är *kommutativ*, $a+b=b+a$, är också något så självklart att du troligen aldrig reflekterat över det. Addition är bara definierat för par av tal. Vid addition av fler än två tal markeras den ordning man skall utföra additionerna på med parenteser, så

$$3+(6+13)=3+19=22 \text{ och } (3+6)+13=9+13=22.$$

Vi vet ju dock att precis som i exemplet ovan så spelar det ingen roll hur vi sätter parenteserna. Summan av talen 3, 6 och 13 är 22 hur vi än räknar. Allmänt gäller att $a+(b+c)=(a+b)+c$ för alla naturliga tal a, b och c och vi säger att additionen är *associativ*. Om inga parenteser skrivits ut gäller *läsriktningsprioritet*, den vänstra additionen utförs först. Uttrycket $3+6+19$ är alltså samma som $(3+6)+13$

Multiplikation av naturliga tal är ju upprepad addition, så t ex

$$6 \cdot 7 = 7+7+7+7+7+7 = 42.$$

Även multiplikation är som bekant kommutativ, d v s $a \cdot b = b \cdot a$ för alla naturliga tal a och b. Detta är inte lika uppenbart[1] som för addition, men en inrutad rektangel med a rutor i ena riktningen och b rutor i den andra har ju $a \cdot b$ alternativt $b \cdot a$ rutor beroende på vilken sida man utgår ifrån.

Multiplikationen är också associativ, d v s $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ för alla naturliga tal a, b och c. Ett rätblock med sidorna a, b och c kan användas för att inse detta. Sammantaget så behöver man varken bry sig om ordning eller parenteser när man bara har en av operationerna addition eller multiplikation.

Då både addition och multiplikation är inblandade, som i beräkningen av $3+4 \cdot 7$, kommer prioritetsregeln *multiplikation före addition* in så $3+4 \cdot 7 = 3+28 = 31$. Här gäller alltså *inte* läsriktningsprioritet. Vill vi att additionen skall utföras först krävs parenteser: $(3+4) \cdot 7 = 7 \cdot 7 = 49$. Denna uträkning kan också göras med *distribution*

[1] Att 5 påsar med 3 kolor i varje och 3 påsar med 5 kolor i varje är lika mycket härligt godis är inte uppenbart för ett litet barn.

som $(3+4)\cdot 7 = 3\cdot 7+4\cdot 7 = 21+28 = 49$. Allmänt gäller vid addition följt av multiplikation den *distributiva lagen*:

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

för alla naturliga tal a, b och c. Detta övertygar man sig om genom att ta två rektanglar som är $a\cdot c$ respektive $b\cdot c$ rutor och lägga dem bredvid varandra.

Om $a, b \in \mathbb{N}$ så säger vi att a är större än eller lika med b, $a \geq b$, om det finns $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b+c$. Tänk efter att detta stämmer överens med din intuitiva uppfattning om jämförelse mellan tal. För $a \geq b$ definierar vi *subtraktion* av a med b, $a-b$, som detta tal c, d v s

$$a-b = c, \text{ där } a = b+c.$$

Fallet $a < b$ återkommer vi till i nästa avsnitt för då hamnar vi ju utanför de naturliga talen, d v s då gäller $a-b \notin \mathbb{N}$.

Nu några ord om division av naturliga tal. Vi använder här $\div$ som divisionstecken. Multiplikation och division av naturliga tal är motsatta operationer, d v s eftersom $6\cdot 7 = 42$ så är $42 \div 7 = 6$. Men multiplikation är ju som vi nämnde samma som upprepad addition och division är därför samma som upprepad subtraktion. Vi får alltså $42 \div 7 = 6$ *eftersom* $42-7-7-7-7-7-7 = 0$. (De gamla mekaniska räknemaskinerna byggde helt på denna princip.) Om divisionen inte går jämnt ut får man en *rest*. T ex får vi

$$45-7-7-7-7-7-7 = 3$$

d v s $45 \div 7 = 6$ med rest 3.

För att underlätta polynomdivision längre fram, är det värdefullt att kunna utföra så kallad lång division av naturliga tal för hand, t ex med hjälp av uppställning i ”liggande stolen” eller ”trappan”. Vilken man väljer är helt oviktigt, algoritmen är samma. Här nedan används ”liggande stolen”. Schematiskt ser den ut så här:

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\textbf{Kvot}} \\ \hline \textbf{Täljare} & \textbf{Nämnare} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Exempel. Vi önskar beräkna $8476 \div 23$.

Lösning. För att det skall vara enklare att följa kalkylerna redovisas varje steg i en ny ”stol”. En förklaring ges efter exemplet.

$$
\begin{array}{ll|lll|lll|lll|l}
\multicolumn{2}{l}{\textbf{Kvot}} & & \multicolumn{2}{l}{3} & & \multicolumn{2}{l}{36} & & \multicolumn{2}{l}{368} & \\
\hline
8476 & & 23 & 8476 & & 23 & 8476 & & 23 & 8476 & & 23 \\
 & & & -69 & & & -69 & & & -69 & & \\
 & & & 15 & & & 157 & & & 157 & & \\
 & & & & & & -138 & & & -138 & & \\
 & & & & & & 19 & & & 196 & & \\
 & & & & & & & & & -184 & & \\
 & & & & & & & & & 12 & \textbf{Rest} & \\
\end{array}
$$

Vi ser här att $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, d v s $8476 \div 23 = 368 + 12 \div 23$ $\square$

Om du tycker att algoritmen är svårbegriplig eller krånglig kan du kanske ha hjälp av följande förklaring:

Det är väldigt opraktiskt att subtrahera talet 23 från talet 8476 mer än 300 gånger. Därför effektiviserar man genom att först räkna ut hur många hundra gånger 23 går i 8476. Eftersom $84 \div 23 = 3$ med rest 15 går 23 minst 300 gånger i 8476, men inte 400 gånger. Vi kan därmed skriva hundratalssiffran 3 i kvoten och subtrahera $300 \cdot 23$ från 8476.

Vi har att $84 - 3 \cdot 23 = 15$ och $8476 - 300 \cdot 23 = 1500 + 76 = 1576$. I den andra ”stolen” är inte nollorna utskrivna, de är underförstådda. I den tredje stolen tas inte siffran 6 med i resten 1576. Det betyder inget, men man brukar göra så eftersom den inte kommer in i kalkylerna i detta steg.

I tredje stolen får vi $157 \div 23 = 6$ med rest 19. Alltså går 23 minst 60 gånger i 1576, men inte 70 gånger. Vi får $157 - 6 \cdot 23 = 19$ och $1576 - 60 \cdot 23 = 190 + 6 = 196$. Vi kan nu skriva tiotalssiffran 6 i kvoten.

Slutligen får vi $196 \div 23 = 8$ med rest 12. Alltså är $196 = 8 \cdot 23 + 12$ och kvotens entalssiffra är 8. Kalkylerna ovan kan sammanföras som

$$
\begin{aligned}
8476 &= 300 \cdot 23 + 1576 = 300 \cdot 23 + 60 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 196 \\
&= 360 \cdot 23 + 8 \cdot 23 + 12 = 368 \cdot 23 + 12.
\end{aligned}
$$

Alltså $8476 \div 23 = 368$ med rest 12.

Specialfallet då divisionen $a \div b$ går jämnt ut, alltså om resten är 0, är speciellt intressant. I detta fall är $a = b \cdot c$ där c också är ett naturligt tal. Talet a är alltså produkten av de två faktorerna b och c. Det finns många synonymer för detta. Om divisionen $a \div b$ går jämnt ut så säger man att

- a är *delbart med* b, eller
- a *delas av* b, eller
- b *delar* a, eller

- b är *divisor i* a, eller
- b är en *faktor i* a, eller
- a är en *multipel* av b.

T ex har vi att $8464 \div 23 = 368$ med rest 0. Detta innebär att $8464 \div 23 = 368$ så med andra ord är 8464 *delbart med* 23 och 23 en *faktor i* 8464.

Eftersom $a = 1 \cdot a$, så är a alltid delare till sig själv och 1 är delare till alla tal. Om b är delare till a där $b \neq 1$ och $b \neq a$ så kallas b *äkta delare* till a.

> Tal som är större än 1 och som saknar äkta delare kallas *primtal*. Tal som har äkta delare kallas *sammansatta tal*. Talet 1 är en enhet och kallas varken primtal eller sammansatt.

De fem minsta primtalen är 2, 3, 5, 7 och 11. Alla jämna tal större än 2 har ju 2 som en äkta delare, så primtal större än 2 måste därför vara udda tal.

Talet 15 kan skrivas som primtalsprodukt $15 = 3 \cdot 5$ och har alltså 3 och 5 som äkta delare. I denna produkt kan faktorernas ordning varieras. Bortsett från detta är faktoruppdelningen unik vilket vi lätt kan konstatera i detta konkreta fall. Vi har ju generellt att om $15 = a \cdot b$, där a och b är naturliga tal större än 1, så är både a och b mindre än 15. Dessutom har vi att $4 \cdot 4 > 15$. Därför måste minst en av faktorerna vara mindre än 4. Vi ser då lätt att enda möjligheten att skriva 15 som produkt är $15 = 3 \cdot 5$.

Resonemanget ovan om möjliga faktorer gäller generellt: Om talet c inte är ett primtal så har c en primtalsfaktor $p \leq \sqrt{c}$ och den andra faktorn är mindre än c. Det är alltså relativt enkelt att avgöra om ett visst tal är ett primtal under förutsättning att talet inte är särskilt stort. Tag som exempel talet 97. Om 97 inte är ett primtal så har det en primtalsfaktor p som uppfyller

$$p \leq \sqrt{97} < \sqrt{100} = 10.$$

Det räcker då att konstatera om 97 finns i någon av ”multiplikationstabellerna” för primtal mindre än 10. Eftersom 97 inte är delbart med 2, 3, 5, eller 7 kan vi dra slutsatsen att 97 är ett primtal.

För stora tal är det däremot tidsödande att avgöra om talet är ett primtal eller ej på detta sätt, till och med om det är ett datorprogram som genomför undersökningen. Det finns dock mer sofistikerade och snabbare sätt att undersöka riktigt stora tal om man har tillgång till en dator.

Det faktum att 15 bara kunde faktoriseras i primtalsfaktorer på ett enda sätt gäller generellt. Redan på antiken bevisade Euklides i Elementa (bok 9) följande centrala sats om uppdelning i primtalsfaktorer.

Aritmetikens fundamentalsats: *Varje naturligt tal som är större än* 1 *kan skrivas som en produkt av primtal. Bortsett från ordningsföljden är primtalsfaktorerna entydigt bestämda. (Här utvidgar vi begreppet* produkt *något och kallar även ett ensamt primtal för en produkt av primtal.)*

Tag som exempel talet 8464. Vi vet redan att det inte är ett primtal eftersom $8464 = 23 \cdot 368$. Här är 23 ett primtal men inte 368 som ju är jämnt. Division med 2 så många gånger som möjligt ger att $368 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23$ och därmed att

$$8464 = 23 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23,$$

en produkt av primtal.

Ett bevis för att varje tal kan skrivas som en produkt av primtal bygger på just detta att ett tal som inte är ett primtal kan skrivas som produkt av två mindre tal. Antingen är dessa primtal eller kan de skrivas som produkt av ännu mindre tal vilka i sin tur antingen är primtal eller kan skrivas som produkt av ännu mindre tal o s v. Det är betydligt knivigare att visa att faktorerna är entydigt bestämda.

En annan av Euklides viktiga satser är:

Sats: Det finns oändligt många primtal.

Bevis. Antag att det bara finns ändligt många primtal. Bilda produkten M av alla dessa och lägg till 1. Det tal $M+1$ som då erhålls är större än alla primtalen. Det är dessutom inte delbart med något av primtalen, eftersom alla dessa delar produkten M. Enligt aritmetikens fundamentalsats är dock $M+1$ en produkt av primtal och vi har fått en motsägelse. Det betyder att vårt antagande att det bara finns ändligt många primtal är felaktigt. $\square$

Det är alltså omöjligt att ge en lista över alla primtal, men man kan naturligtvis ge en lista av alla primtal upp till ett visst tal. Denna lista kan sedan ligga till grund då ett visst tal skall skrivas som produkt av primtal. Vill man på ett systematiskt sätt plocka fram alla primtal upp till ett givet tal kan man använda *Erathostenes primtalssåll* från ca 230 fvt. Detta beskrivs i många läroböcker och kan säkert hittas på internet. Idén är att utgå från alla naturliga tal från 2 t o m den önskade övre gränsen. Successivt stryker man alla äkta multipler av primtalen med början från 2, sedan 3, 5 o s v. Det minsta överhoppade talet som är större än de hittills funna primtalen måste vara nästa primtal i listan. Då man strukit multiplerna av 2, 3 och 5 är minsta överhoppade talet 7, därefter 11 o s v.

Testövning

1. Bestäm kvot och rest $937 \div 31$
2. Bestäm kvot och rest $427 \div 23$

Svar:

1. kvot 30 och rest 7

2. kvot 18 och rest 13

1.1.2 Negativa tal

Addition av naturliga tal är ju direkt sammankopplad med antalsräkning och därmed något som även mycket små barn förstår. Eftersom de övriga räknesätten för naturliga tal bygger på addition, så finns det en mycket naturlig tolkning också för dessa. Då det gäller negativa heltal är situationen lite annorlunda, även om också dessa har naturliga tolkningar t ex som "skuld". De negativa heltalen är objekt man *definierar* med hjälp av de naturliga talen. Till varje positivt naturligt tal a införs ett negativt (motsatt) tal ^{-}a. Man måste sedan *definiera* hur man skall räkna med dessa nya objekt. Att göra det i detalj här skulle ta alltför mycket utrymme, så vi ger bara en kort sammanfattning av hur definitionerna ser ut.

Vi börjar med att *definiera* addition också för negativa tal. Vår utgångspunkt är addition av naturliga tal samt subtraktionen $a-b$ då $a \geq b$ för naturliga tal a och b. Vi definierar först subtraktionen $a-b$ då $a<b$ som $a-b = {}^{-}(b-a)$. Observera att $b>a$ så $b-a$ är redan definierat. Därmed är subtraktionen definierad för alla par av naturliga tal. Additionen definieras då för alla negativa tal genom

$$\begin{aligned} {}^{-}a+b &= b+{}^{-}a = b-a \\ {}^{-}a+{}^{-}b &= {}^{-}(a+b), \end{aligned}$$

för alla naturliga tal a och b. Exempel på vad definitionerna leder till är

$$\begin{aligned} 3+{}^{-}7 &= 3-7 = {}^{-}(7-3) = {}^{-}4 \\ {}^{-}3+7 &= 7-3 = 4 \\ {}^{-}3+{}^{-}7 &= {}^{-}(7+3) = {}^{-}10. \end{aligned}$$

Också multiplikation för negativa tal måste *definieras* och det görs så här

$$\begin{aligned} {}^{-}a\cdot b &= b\cdot {}^{-}a = {}^{-}(a\cdot b) \\ {}^{-}a\cdot {}^{-}b &= a\cdot b, \end{aligned}$$

för alla naturliga tal a och b. Det är inte så svårt att argumentera för att ovanstående är enda rimliga multiplikationen. Men det är en *definition*, något man har bestämt. Exempel på vad definitionerna leder till är

$$\begin{aligned} 4\cdot {}^{-}7 &= {}^{-}(4\cdot 7) = {}^{-}28 \\ {}^{-}4\cdot {}^{-}7 &= 4\cdot 7 = 28. \end{aligned}$$

Det är inte heller självklart, men bevisbart, att samma räkneregler gäller för heltalen som för de naturliga talen. För att illustrera hur man går till väga så visar vi att en trippel av negativa tal uppfyller den distributiva lagen. Vi har nämligen för alla naturliga tal a, b och c att

$$^{-}a \cdot (^{-}b + ^{-}c) = ^{-}a \cdot ^{-}(b+c) = a \cdot (b+c)$$

och

$$(^{-}a \cdot ^{-}b) + (^{-}a \cdot ^{-}c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b+c),$$

där vi i sista likheten utnyttjar den distributiva lagen för naturliga tal.

Testövning

1. Beräkna $5 - (^{-}4 - 7)$
2. Beräkna $^{-}5 \cdot (^{-}4 - 3)$
3. Beräkna $^{-}5 \cdot ^{-}4 - 3$

Svar:

1. 16
2. 35
3. 17

1.1.3 Räkneregler

Här sammanfattas de prioritetsregler och räkneregler som behandlats i kapitlet.

Prioriteringsordning

1. Operation mellan parenteser.
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion
4. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

Räkneregler för heltal

För alla heltal a, b och c gäller det att

- $a + b = b + a$ *kommutativitet*
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ *associativitet*
- $a + 0 = a$ *identitet*
- $a \cdot b = b \cdot a$ *kommutativitet*
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *associativitet*
- $a \cdot 1 = a$ *identitet*
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *distributivitet*
- $a + {}^{-}a = 0$
- $a + {}^{-}b = a - b$
- ${}^{-}({}^{-}a) = a$ *minus minus är plus*
- $a \cdot {}^{-}b = {}^{-}(a \cdot b)$
- ${}^{-}a \cdot {}^{-}b = a \cdot b$ *minus minus är plus*
- $a - (b - c) = a - b + c$ *minus minus är plus*
- $a - (b + c) = a - b - c$

1.1.4 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1a

1.1.1 Bestäm kvot och rest till

a) $7956 \div 21$ b) $7497 \div 21$

c) Är något av talen 7956 eller 7497 delbart med 21?

1.1.2 Beräkna

a) $7 - {}^{-}2 \cdot (3 - 9) \cdot ((2 + {}^{-}5 - 8) \cdot ({}^{-}3 - {}^{-}5) - 4)$

b) $(^-4-2)\cdot((^-6-{}^-9)-((6-{}^-7+3)\cdot(^-2-3)+{}^-1\cdot(7-{}^-4)))$

1.1.3 Skriv följande utan parenteser och utan negativa (motsatta) tal.

a) $a-{}^-b\cdot(a+1)-b\cdot(^-a+1)$

b) $(^-a\cdot{}^-b+a\cdot(b-2\cdot{}^-a))\cdot(^-1+b)$

1.2 Bråkräkning

När man inför de negativa talen så får uttrycket $a-b$ med $a<b$ mening som ett (negativt) tal. På samma sätt ger man genom att införa *rationella tal* eller *bråktal* mening åt $a\div b$ som ett tal även då resten inte är 0.

1.2.1 De rationella talen

Rationella tal eller *bråktal* skrivs $\frac{p}{q}$, där p och q är heltal och $q\neq 0$. Mängden av alla de rationella talen betecknas med $\mathbb{Q}$. Ett heltal p identifieras med det rationella talet $\frac{p}{1}$. På det viset är alla heltal också rationella tal. Mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$, är alltså en *delmängd* till mängden av alla rationella tal, d v s $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Ett rationellt tal kan alltid skrivas på (oändligt) många olika sätt, för om $s\neq 0$ är ett heltal så är

$$\frac{p}{q}=\frac{s\cdot p}{s\cdot q}.$$

Man säger att bråktalet $\frac{p}{q}$ *förlängts* med (faktorn) $s\neq 0$ till $\frac{s\cdot p}{s\cdot q}$, eller att $\frac{s\cdot p}{s\cdot q}$ *förkortats* med s till $\frac{p}{q}$. Till exempel är $\frac{7}{11}$ och $\frac{14}{22}$ lika eftersom

$$\frac{7}{11}=\frac{2\cdot 7}{2\cdot 11}=\frac{14}{22}.$$

I allmänhet försöker man ange bråktal på enklaste formen så att täljaren p och nämnaren q inte har någon gemensam faktor (utom 1 och $^-1$). Ett systematiskt sätt att åstadkomma detta är att primtalsfaktorisera täljare och nämnare och förkorta med alla gemensamma primtalsfaktorer. Vi har t ex att

$$\frac{84}{30}=\frac{2^2\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{2\cdot 7}{5}=\frac{14}{5}.$$

Man kan förlänga/förkorta med negativa faktorer också och speciellt kan man alltid se till att nämnaren är positiv:

$$\frac{^-7}{^-11}=\frac{^-1\cdot 7}{^-1\cdot 11}=\frac{7}{11}\quad\text{och}\quad\frac{7}{^-11}=\frac{^-1\cdot 7}{^-1\cdot{}^-11}=\frac{^-7}{11}.$$

Man kan välja att ge talet på blandad form istället för ren bråkform. I så fall skriver man $3\frac{1}{4}$ istället för $\frac{13}{4}$. Det är emellertid lätt att missuppfatta den blandade formen och läsa $3 \cdot \frac{1}{4}$ som är $\frac{3}{4}$.

1.2.2 Räkning med rationella tal

Addition (och subtraktion) av bråktal med *samma nämnare* ges av addition (respektive subtraktion) av täljarna och samma nämnare:

$$\frac{11}{13}+\frac{5}{13}=\frac{11+5}{13}=\frac{16}{13} \quad \text{och} \quad \frac{11}{13}-\frac{5}{13}=\frac{11-5}{13}=\frac{6}{13}.$$

I allmänhet måste termerna skrivas om så att de får samma nämnare. Korsvis förlängning av de två nämnarna fungerar alltid:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a}{d\cdot b}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}.$$

Det är dock en god vana att inte förlänga med mer än nödvändigt. Då man arbetar med rationella funktioner, se avsnitt 4.3, blir detta extra viktigt. För att förlänga med så lite som möjligt så letar man upp den minsta gemensamma multipeln av nämnarna. Ett systematiskt sätt att göra detta är att primtalsfaktorisera nämnarna och leta upp den produkt av primtal som är den minsta som innehåller alla faktorer för nämnarna. Om vi t ex vill räkna ut

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30},$$

där båda talen är på reducerad form, så är $12 = 2^2 \cdot 3$ och $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. De primtal som ingår är alltså 2 (med potensen 2), 3 och 5. Den minsta möjliga nämnaren är alltså $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. För att få denna nämnare så får vi förlänga med 5 respektive 2:

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}+\frac{2\cdot 37}{2\cdot 30}=\frac{35}{60}+\frac{74}{60}=\frac{109}{60}.$$

Om man slaviskt följer den allmänna principen med korsvis multiplikation så får man

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30}=\frac{30\cdot 7}{30\cdot 12}+\frac{12\cdot 37}{12\cdot 30}=\frac{210}{360}+\frac{444}{360}=\frac{654}{360}=\frac{109}{60},$$

vilket ger jobbigare räkningar.

Eftersom

$$\frac{a}{b}+\frac{{}^-a}{b}=\frac{a+{}^-a}{b}=\frac{0}{b}=0$$

är det logiskt att kalla $\frac{{}^-a}{b}$ det motsatta talet till $\frac{a}{b}$ och skriva $\frac{{}^-a}{b} = {}^-\left(\frac{a}{b}\right)$

Subtraktion av bråktal görs på motsvarande sätt som addition:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a - b \cdot c}{d \cdot b},$$

Även här bör man förlänga med så lite som möjligt på samma sätt som för addition:

$$\frac{7}{12} - \frac{39}{15} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 12} - \frac{4 \cdot 39}{4 \cdot 15} = \frac{35}{60} - \frac{156}{60} = \frac{35 - 156}{60} = \frac{{}^{-}121}{60} = -\frac{121}{60}.$$

Här hade vi $12 = 2^2 \cdot 3$ och $15 = 3 \cdot 5$. och minsta möjliga nämnaren var alltså åter $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Multiplikation av rationella tal definieras av:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Att denna definition är den enda rimliga kan man motivera på följande sätt:

- Multiplikation med heltal skall motsvara upprepad addition. Alltså är t ex

  $$3 \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{c}{d} + \frac{c}{d} = \frac{3 \cdot c}{d}.$$

- Vidare skall multiplikation vara associativ. Alltså är

  $$\frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{c}{d} = \frac{7}{7} \cdot \frac{c}{d} = \left(7 \cdot \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{c}{d} = 7 \cdot \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{c}{d}\right).$$

  Men detta är möjligt endast om

  $$\frac{1}{7} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{7 \cdot d}.$$

- Sammantaget ger detta

  $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = a \cdot \frac{c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Division av rationella tal ges av

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Detta motiveras av att division är den till multiplikation motsatta operationen, d v s:

$$\text{Eftersom } 3 \cdot 4 = 12 \text{ så är } 3 = 12 \div 4.$$

Så kan vi resonera också då det gäller rationella tal:

$$\text{Eftersom } \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\right)\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b} \text{ så är } \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}.$$

Speciellt är

$$13\div 4=\frac{13}{1}\div\frac{4}{1}=\frac{13\cdot 1}{1\cdot 4}=\frac{13}{4}.$$

I kapitel 1.1.1 skulle vi sagt att $13\div 4$ ger kvoten 3 och resten 1. Då handlar det om *heltalsdivision* som speglar t ex en fördelning: *om tretton ägg skall fördelas på kartonger som rymmer fyra ägg vardera så får man tre fulla kartonger och ett ägg över.* I detta kapitel handlar det om division för rationella tal. Alla rationella tal kan divideras, kvoten är alltid ett rationellt tal.

Likheten $13\div 4=\dfrac{13}{4}$ motiverar/förklarar användandet av bråkstrecket som divisionssymbol. Det är ofta praktiskt och bekvämt att använda bråkstrecket som divisionssymbol. Det gäller bara att veta vad $\dfrac{a}{b}$ betyder. Är det ett bråk*tal* alltså ett rationellt tal, eller är det ett *bråk* alltså en division? Vi har att $\dfrac{3}{4}$ är ett rationellt tal (och ett bråk), medan $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ är ett bråk men inte ett rationellt tal.

Ibland orsakar användningen av bråkstreck som divisionssymbol felläsning/feltolkning: Vi har att $\dfrac{a}{b}\div c=\dfrac{a}{b\cdot c}$ men $a\div\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\cdot c}{b}$. Därför är det viktigt att veta vad som avses då man använder ”dubbelbråk”. Att $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ och $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ inte är samma sak, syns lätt i tryckt text, men inte lika lätt i handskriven text. Speciellt viktigt är det att skriva likhetstecknet på rätt nivå.

Tänk också på att ett dubbelbråk ofta innehåller ”osynliga parenteser”, vilket illustreras i nästa exempel.

Exempel. Vi skall skriva $\dfrac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}}$ som ett bråktal på enklaste form.

Lösning. Vi subtraherar i täljare och och adderar i nämnare och utför sedan divisionen vilket ger

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}} &= \left(\frac{1}{7}-\frac{3}{11}\right)\div\left(\frac{2}{63}+\frac{11}{18}\right)\\
&= \left(\frac{1\cdot 11}{7\cdot 11}-\frac{3\cdot 7}{11\cdot 7}\right)\div\left(\frac{2\cdot 2}{7\cdot 9\cdot 2}+\frac{11\cdot 7}{2\cdot 9\cdot 7}\right)\\
&= \left(\frac{11-21}{11\cdot 7}\right)\div\left(\frac{4+77}{2\cdot 9\cdot 7}\right)=\frac{{}^{-}10\cdot 2\cdot 9\cdot 7}{11\cdot 7\cdot 81}={}^{-}\frac{20}{99}
\end{aligned}$$

efter förenkling. $\square$

1.2.3 Räkneregler

Här sammanfattas de räkneregler som gäller för rationella tal. De som tidigare behandlats för heltalen gäller även för de rationella talen.

Räkneregler

För alla rationella tal, $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a}{d\cdot b}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
- $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

1.2.4 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1b

1.2.1 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\frac{5040}{40320}$ b) $\frac{6182}{^{-}616}$ c) $\frac{^{-}42\cdot 308\cdot 230}{^{-}60\cdot 121\cdot {}^{-}69}$

d) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$ e) $3\frac{1}{4}+2\frac{5}{6}+4\frac{3}{8}$ f) $2\frac{15}{17}-3\frac{1}{5}+1\frac{2}{3}$

1.2.2 Skriv följande rationella tal på enklaste form och blandad form

a) $\frac{1}{4}-(1\frac{1}{3}-2\frac{1}{6})$

b) $2\frac{1}{4}-3\frac{1}{5}-\left(4\frac{11}{21}-3\frac{5}{7}\right)+\left(3\frac{1}{5}-1\frac{7}{15}\right)$

1.2.3 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\frac{1}{7} \div \frac{4}{7}$

b) $\frac{6}{11} \cdot \frac{11}{24} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{38}{17}$

c) $2\frac{1}{6} \cdot 3\frac{3}{4} \div 4\frac{7}{12}$

d) $^{-}11\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{5} \div {}^{-}1\frac{2}{15}$

e) $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{20}\right) \div \left(\frac{9}{100} \cdot \frac{5}{19}\right)$

f) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{20} \div \frac{9}{100} \cdot \frac{5}{19}$

g) $\left(\frac{77}{8} \div \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{24}{13} \div \frac{6}{11}\right)$

h) $\frac{77}{8} \div \frac{4}{3} \div \frac{24}{13} \div \frac{6}{11}$

1.2.4 Skriv följande rationella tal på enklaste form

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{3\frac{5}{6} - 2\frac{7}{8}}{4\frac{5}{11} - 3\frac{1}{6}}$

c) $\frac{3\frac{1}{4} - 2\frac{7}{12}}{1\frac{1}{5} - \frac{2}{7}} - \frac{1\frac{2}{11} - \frac{8}{9}}{\frac{23}{99}} \cdot 1\frac{5}{41}$

1.3 Potenser med heltalsexponent

1.3.1 Potenser

I detta avsnitt introduceras begreppet potens för rationella tal, och därmed naturligtvis för alla heltal. Exponenten är här heltal men längre fram (i avsnitt 1.7) kommer exponenten att vara ett rationellt tal och slutligen ett reellt tal. De räknelagar som presenteras i avsnittet är allmängiltiga, de gäller även med reella exponenter.

1.3.2 Potens med heltalsexponent

Potenser med *heltalsexponenter* definieras av

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1, \text{ för } a \neq 0,\\
a^1 &= a,\\
a^2 &= a \cdot a,\\
a^3 &= a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a,\\
a^n &= a \cdot a^{n-1} = a \cdot a \cdots a, \text{ produkten av } n \text{ faktorer då } n \text{ är ett positivt heltal.}
\end{aligned}$$

Vidare definierar man $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ då n är ett positivt heltal och $a \neq 0$.

I definitionen ovan kan n bara vara ett heltal medan a kan vara såväl ett heltal som ett rationellt tal.

Vid beräkning av potenser av negativa tal får man vara extra uppmärksam. De beräknas naturligtvis på samma sätt som potenser av positiva tal, så t ex

$$^{-}3^4 = {}^{-}3 \cdot {}^{-}3 \cdot {}^{-}3 \cdot {}^{-}3 = 81.$$

Men risken för felläsning är stor varför det är klokt att alltid skriva parentes runt talet: $^{-}3^4 = ({}^{-}3)^4 = 81$ så att det inte förväxlas med $^{-}(3^4) = {}^{-}81$. Om man använder det vanliga skrivstättet för negativa tal så *måste* fjärde potensen av -3 skrivas som $(-3)^4$.

Eftersom $({}^{-}1)^2 = 1$, så gäller att: $({}^{-}a)^1 = {}^{-}a$, $({}^{-}a)^2 = a^2$, $({}^{-}a)^3 = {}^{-}(a^3)$ och allmänt

$$({}^{-}a)^n = \begin{cases} a^n & \text{om } n \text{ är ett jämnt heltal} \\ {}^{-}(a^n) & \text{om } n \text{ är ett udda heltal.} \end{cases}$$

Definitionen av multiplikation för rationella tal $\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{p \cdot p}{q \cdot q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ ger för potenser av rationella tal att $\left(\dfrac{p}{q}\right)^n = \dfrac{p^n}{q^n}$. I detta fall är det nödvändigt att använda förtydligande parenteser, för annars tolkas det som $\dfrac{p^n}{q}$.

1.3.3 Räkneregler

Vi sammanfattar här de regler som gäller vid räkning med potenser. De kan härledas om man skriver ut vad de olika potenserna är. T ex är

$$(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3 \cdot 4}.$$

Potenslagar

För alla tal a, $b \neq 0$ gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Vid räkning med potenser gäller prioritetsregeln att potenser beräknas före multiplikation eller division och även före addition eller subtraktion, så t ex

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \text{ och } 2 + 3^2 = 2 + 9 = 11.$$

Som tidigare skall operation inom parenteser beräknas först så t ex

$$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 \text{ och } (2+3)^2 = 5^2 = 25.$$

Vid upprepad potensberäkning, som i 2^{3^3}, gäller att exponenten beräknas först så vi får

$$2^{3^3} = 2^{(3^3)} = 2^{27} = 134217728 \text{ och } 2^{5+3} = 2^{(5+3)} = 2^8 = 256.$$

Också här ger parenteser förtur så $(2^3)^3 = 8^3 = 512$

En liten **varning!** Det finns ingen standardprioritet för upprepad potensberäkning på räknare. Vissa kalkylatorer har ”exponenten först” prioritet, andra har läsriktningsprioritet. Uttrycket 2^{3^3} kan bli antingen 134217728 eller 512 beroende på räknarfabrikatet och ibland t o m på modellen. För säkerhets skull – använd parenteser.

Här sammanfattar vi de prioritetsregler som behandlats hittills.

Prioriteringsordning

1. Operation mellan parenteser.
2. Exponent
3. Potens
4. Multiplikation och division
5. Addition och subtraktion
6. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

1.3.4 Övningar

1.3.1 Beräkna

a) 5^2	b) 2^5	c) $(^-3)^4$	d) $(^-4)^3$
e) 1^{100}	f) 100^1	g) 3^0	h) $(^-3)^0$

1.3.2 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a) 2^{-2} b) $(^{-}3)^{-3}$ c) 1^{-5}

1.3.3 Skriv som potenser av 2

a) $1/64$ b) $16^3/2^{10}$ c) $128^3/32^5$

1.3.4 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a) $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-7} \cdot 105 \cdot {}^{-}7^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 5}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(^{-}\frac{3}{7}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{10}\right)^{-3}}{56 \cdot 10^{-6}}$

1.4 Reella tal

Det är ganska komplicerat att definiera vad som menas med ett reellt tal. Det kräver mer avancerad matematik än vad som normalt ingår i en gymnasieutbildning. Vi måste därför hålla oss till en relativt intuitiv och förenklad bild av begreppet. Med ett *reellt* tal menas då ett tal r som ges av en *decimalutveckling*, som beskrivs nedan.

Varje positivt reellt tal har en heltalsdel n, som är ett naturligt tal, och en decimaldel

$$r = n, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots,$$

där alla talen a_i är naturliga tal mellan 0 och 9. Detta ska tolkas som att

$$r = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \frac{a_5}{100000} + \ldots.$$

Till varje positivt reellt tal finns ett motsatt, negativt tal

$$^{-}r = {}^{-}n, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots = {}^{-}\left(n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \frac{a_5}{100000} + \ldots\right).$$

Genom att bara ta med ändligt många decimaler får vi ett rationellt tal, t ex

$$3,1415927 = \frac{31415927}{10000000} \approx \pi,$$

som approximerar det reella talet. Ju fler decimaler dess bättre approximation. De rationella talen karakteriseras av att decimalutvecklingen antingen är ändlig, som t ex

$$\frac{3}{16} = 0,1875$$

eller att den avslutas periodiskt som t ex

$$\frac{59}{275} = 0,214545454545454545\ldots.$$

Två decimalutvecklingar representerar samma reella tal om deras differens är 0, d v s om skillnaden mellan dem närmar sig 0 när man ökar antalet decimaler. Detta innebär att t ex $3,25300000\ldots = 3,25299999\ldots$. (De avslutande punkterna innebär som vanligt att mönstret fortsätter obrutet.)

Reella tal kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras, genom att man utför operationerna på de rationella approximationerna. Genom att ta med fler och fler decimaler får man en följd av rationella tal som närmar sig (har gränsvärdet) de reella talens summa, differens, produkt eller kvot.

För att åskådliggöra de reella talen använder man ofta punkter på tallinjen. Inte heller detta är helt oproblematiskt. Vad är en linje och vad är en punkt?

I praktiken räknar vi bara med rationella approximationer till de reella talen, eller med symboler, som $\sqrt{2}$, som representerar specifika reella tal. Redan de gamla grekerna visste att det inte finns rationella tal x sådana att $x^2 = 2$, 3, 5, 6 m fl, med andra ord att $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ m fl inte är rationella tal. Man kan numera visa att det däremot finns sådana reella tal.

Mängden av alla reella tal betecknas $\mathbb{R}$. De rationella talen är också reella tal, mängden av alla rationella tal är en *delmängd* av mängden av alla reella tal. Vi har alltså att

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.4.1 Olikheter för reella tal

I likhet med heltalen och de rationella talen finns det tre typer av reella tal, de positiva, de negativa och talet 0. Detta gör det möjligt att definiera *olikhet*, *större än* och *mindre än* för reella tal.

Definition av olikhet: Det reella talet a är *större än* talet b, skrivs $a > b$, om och endast om $a - b$ är positivt.
Talet a är *mindre än* talet b, skrivs $a < b$, om och endast om $a - b$ är negativt.

För alla reella tal a och b finns därmed tre möjligheter: $a = b$, $a > b$ eller $a < b$.

I detta sammanhang har man ofta användning av en praktisk mängdbeskrivning. Säg till exempel att vi, av någon anledning, är intresserade av alla de reella tal x som uppfyller villkoret $x < 5$. Ett praktiskt sätt att beskriva denna mängd av tal är

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 5\},$$

som tolkas och utläses på följande sätt. De speciella parenteserna $\{$ och $\}$ är mängdparenteser, (vardagligt krullparenteser). De inramar beskrivningen av objekten i mängden. Det inledande $x \in \mathbb{R}$ innebär att alla objekten skall tillhöra mängden av alla reella tal, kort sagt att alla objekt är reella tal. Kolon ':' läses *sådana att*. Efter kolontecknet kommer villkoret som skall vara uppfyllt för att ett reellt tal x skall få vara med i mängden. I ord läser man alltså: *mängden av alla reella tal x sådana att x är mindre än* 5. Vi har att $^{-}3 \in \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ och $12 \notin \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$. Talet $^{-}3$ tillhör mängden men talet 12 tillhör inte mängden.

De positiva reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, de negativa reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ och de *icke-negativa* reella talen är $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Mängdbeteckningen kommer vi också att använda för andra grundmängder än de reella talen. Man kan t ex skriva $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$ vilket betyder mängden av alla heltal vars kvadrat är mindre än 5, d v s $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

När det är klart att det är de reella talen som avses så finns det praktiska beteckningar för vissa mängder, så kallade *intervall*:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}
\end{aligned}
$$

Observera att '(' respektive ')' betyder att ändpunkten **inte** är med och att '[' respektive ']' betyder att ändpunkten är med.

1.4.2 Räkneregler för olikheter

Också för olikheter gäller vissa räkneregler. De kan alla härledas från definitionen av olikhet. Vi ger här ett exempel på regel och härledning.

Exempel. Vi skall bevisa olikhetsregeln: *Om a och b är reella tal sådana att* $a > b$ *så gäller det att* $a + c > b + c$ *för alla reella tal c.*

Lösning. Vi beräknar differensen $(a + c) - (b + c)$ och skall visa att denna är positiv om $a > b$. Men $(a+c) - (b+c) = a + c - b - c = a - b$, som är positiv eftersom $a > b$. Vi har därmed visat att $a + c > b + c$ om $a > b$. $\square$ Vi återkommer till olikheter i del 2.

Räkneregler

För alla reella tal $a,\ b,\ c$ och d, gäller det att

- Om $a < b$ och $b < c$ så gäller $a < c$
- Om $a < b$ så gäller $a+c < b+c$
- Om $a < b$ och $c < d$ så gäller $a+c < b+d$
- Om $a < b$ och $0 < c$ så gäller $a \cdot c < b \cdot c$
- Om $a < b$ och $c < 0$ så gäller $a \cdot c > b \cdot c$

1.4.3 Övningar

1.4.1 Gäller det att

a) $2 \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$? b) $2 \leq 3$?

(Symbolen $\leq$ utläses *mindre än eller lika med*. Talet 3 är med i mängden.)

c) Är det någon skillnad på utsagorna i (a) och (b) ovan?

1.4.2 Visa att räknereglerna för olikheter i avsnitt 1.4.2 gäller genom att använda metoden som presenteras i exemplet i samma avsnitt.

1.4.3 Ge exempel på reella tal $a,\ b,\ c$ och d sådana att
$a < b$ och $c < d$ men där $a - c < b - d$ *inte* gäller.

1.5 Absolutbelopp

I detta avsnitt skall vi arbeta med en av de grundläggande operationerna på reella tal, *absolutbelopp*. Detta återkommer i avsnitt 4.4 då vi studerar funktioner.

Definition: Om a är ett reellt tal så är *absolutbeloppet* av a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om} \quad a \geq 0, \\ {}^{-}a & \text{om} \quad a < 0. \end{cases}$$

Tänk på att ${}^{-}a$ är det motsatta talet till a. Om a är negativt så är ${}^{-}a$ positivt, så t ex är $|{}^{-}3| = {}^{-}({}^{-}3) = 3$.

Av definitionen följer direkt att $|a| \geq 0$ för alla reella tal a. En geometrisk tolkning av absolutbeloppet är att $|a|$ talar om hur långt från punkten 0 som punkten a ligger på tallinjen.

Om a och b är två reella tal så är $|a-b|$ avståndet mellan a och b på tallinjen. Vi har t ex att ${}^{-}7$ och 3 ligger på avståndet 10 från varandra, eftersom $|{}^{-}7-3| = |{}^{-}10| = 10$.

Exempel. Vi söker de tal b som uppfyller $|3-b| = 5$.

Lösning. Vi söker de punkter på tallinjen, som ligger på avståndet 5 från 3. Det är två punkter, en till höger om 3, nämligen $3+5=8$, och en till vänster, $3-5={}^{-}2$. □

Exempel. Vi söker de tal b som uppfyller $|3-b| \leq 5$.

Lösning. Nu söker vi de punkter på tallinjen, som ligger på avstånd *högst* 5 från 3. Det är alla punkter som ligger *mellan* 3 och $3+5=8$, eller *mellan* 3 och $3-5={}^{-}2$. Alltså alla punkter mellan ${}^{-}2$ och 8. Med mängdskrivsättet har vi

$$\{x \in \mathbb{R} : |3-b| \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : {}^{-}2 \leq x \text{ och } x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R} : {}^{-}2 \leq x \leq 8\}.$$

där vi i sista uttrycket använt ett vanligt skrivsätt som kombinerar två olikheter. □

1.5.1 Övningar

1.5.1 Bestäm

a) $|7|$ b) $|{}^{-}7|$ c) $|0|$

1.5.2 Bestäm alla reella tal x sådana att

a) $|x+1| = 1$ b) $|3-x| = 7,5$ c) $|x+4| = 0$

d) $|3-2x| = 5$ e) $|x-2| = {}^{-}2$

1.5.3 Ange (utan beloppstecken) de x, som satisfierar

a) $|x-1| \leq 2$ b) $|x+3| < 5$ c) $2 < |x-2| \leq 3$

d) $|x+2| \leq 0$

1.6 Kvadratrötter

Vi fortsätter nu med en annan av de grundläggande operationerna på reella tal, kvadratroten. Också till denna återkommer vi i kapitel 4 då vi studerar funktioner.

1.6.1 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom produkten av såväl två positiva tal, som två negativa tal, är positiv så gäller det att

$$x^2 = x \cdot x \geq 0 \text{ för alla reella tal } x.$$

Alltså har ekvationen $x^2 = b$ ingen reell lösning om $b < 0$. I avsnitt 1.4 behandlades svårigheterna med att avgöra huruvida det talsystem man arbetar med räcker till för att lösa en viss ekvation. Men som påpekades där så har ekvationen $x^2 = b$ alltid reell lösning om $b > 0$. I själva verket har den alltid två, t ex har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna 3 och $^-3$.

Definition: Med *kvadratroten* ur b, $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b.

Alltså är $\sqrt{9} = 3$ och **inte** $^-3$ eller ± 3. Det gäller också att $\sqrt{0} = 0$.
Enligt definitionen har vi alltså att $(\sqrt{b})^2 = b$. Men det gäller också att

$$\left(^-\sqrt{b}\right)^2 = \left(^-\sqrt{b}\right) \cdot \left(^-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b.$$

Alltså gäller det att:

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika reella rötter: $\sqrt{b}$ och $^-\sqrt{b}$

Man skriver ibland $x^2 = b \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, för $b \geq 0$. Med detta menas alltså att ekvationen har rötterna $x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = {}^-\sqrt{b}$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 9$ har således rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, d v s $x_1 = 3$ och $x_2 = {}^-3$. □

1.6.2 Räkneregler

Av definitionen av kvadratrot får vi följande räkneregler:

Räkneregler för kvadratrot

- $(\sqrt{a})^2 = a$ för $a \geq 0$.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, d v s
$$\sqrt{a^2} = a \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2} = {}^-a \text{ om } a < 0.$$
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$ och alla a, d v s
$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2 \cdot b} = {}^-a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a < 0.$$
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, om $a > 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, $a \neq b$, $a, b > 0$.

Den första punkten följer direkt av definitionen av kvadratrot eftersom $\sqrt{a}$ *är* det icke negativa tal vars kvadrat är a.

Punkt två kan bevisas genom att vi konstaterar att $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ och att

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b.$$

Alltså är $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ enligt definitionen av kvadratrot.

På liknande sätt bevisas regeln för roten ur en kvot och de två efterföljande reglerna.

Den femte regeln följer av

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Reglerna i sista punkten kallas *förlängning med konjugatuttryck* eftersom $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ och $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ kallas konjugatuttryck till varandra. Om man multiplicerar dem med varandra så får man (se avsnitt 1.9)

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

De två sista reglerna kan nu visas genom att man förlänger med konjugatet, så t ex för den första likheten har vi

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \text{ för } a \neq b,\, a,b > 0.$$

Anmärkning. I allmänhet, alltså för de flesta tal a och b, är

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Till exempel ger $a = b = 1$ att $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$, medan $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 2$. På samma sätt är i allmänhet

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

Exempel. Här kommer ett antal exempel på hur man kan använda räknereglerna.

(a) Ekvationen $4x^2 - 3 = 0$ får vi till $x^2 = 3/4$ genom att addera 3 till båda leden och sedan dividera dem med 4. Den har därmed rötterna

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Den tredje punkten ger

$$\sqrt{(^-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = \left|{}^-3\right|.$$

(c) Den fjärde punkten handlar om att bryta ut kvadrater ur rotuttryck eller multiplicera in faktorer och vi har t ex

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

och

$$^-2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = {}^-\left(2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = {}^-\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3}{2}} = {}^-\sqrt{6}.$$

(d) Den näst sista punkten ger t ex

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(e) Förlängning med konjugat (sista punkten) ger att man kan skriva om uttryck som

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}}$$

på följande sätt

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}} = \frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5-\sqrt{6}}{25-6} = \frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

så att man får heltalsnämnare.

□

1.6.3 Övningar

1.6.1 Förenkla

a) $\sqrt{0,49}$ b) $\sqrt{90000}$ c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{75}$ d) $\sqrt{10}/\sqrt{125}$

e) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ f) $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{64}$.

1.6.2 Lös ekvationen

a) $x^2-25=0$ b) $5-x^2=0$ c) $9x^2-4=0$ d) $16-6x^2=0$

e) $x^2=0$

1.6.3 Skriv med heltalsnämnare

a) $2/\sqrt{6}$ b) $3/\sqrt{21}$ c) $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

d) $2/(\sqrt{11}-3)$ e) $1/(2-\sqrt{5})$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

1.7 *n*-te rötter

Man kan visa att, om $b \geq 0$ och n är ett positivt heltal, så finns, i likhet med specialfallet $n=2$, precis ett icke-negativt tal a så att $a^n=b$. Om n är ett jämnt tal så gäller också att $({}^{-}a)^n=b$. Om n är ett udda tal så gäller istället att $({}^{-}a)^n={}^{-}b$. Detta leder till följande definition av n-te roten ur ett icke-negativt tal.

1.7.1 *n*-te roten ur reella tal

Definition: Om n är ett positivt heltal och $b \geq 0$ är ett reellt tal, så menas med *n-te roten* ur b, $\sqrt[n]{b}$, det reella tal ≥ 0, som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n=b$.

Om b är ett negativt tal och n är ett positivt, udda heltal så menas med $\sqrt[n]{b}$ det *negativa* tal som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n=b$.

Ekvationen $x^n=b$, där b reellt tal och n är ett positivt heltal, har då följande *reella rötter*:

1. $x=\sqrt[n]{b}$, om n är ett *udda* (positivt) heltal,
2. $x=\pm\sqrt[n]{b}$, om $b \geq 0$ och n är ett *jämnt* (positivt) heltal,

3. saknar reella rötter om n är *jämnt* och $b < 0$ och $\sqrt[n]{b}$ är i detta fall *inte* definierat.

För *udda* $n = 1,3,5,\ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{{}^{-}b} = {}^{-}\sqrt[n]{b}$. Definitionen av $\sqrt[n]{b}$ gäller även för $n = 1$, vi har då att $\sqrt[1]{b} = b$ för alla reella tal b.

Exempel. Eftersom $2^4 = 16$ och $5^3 = 125$ så får vi

$$\sqrt[4]{16} = 2,\ \sqrt[3]{125} = 5 \text{ och } \sqrt[3]{{}^{-}125} = {}^{-}5.$$

direkt från definitionen. □

1.7.2 Räkneregler

Följande *räkneregler* för *n-te rötter* bevisas på samma sätt som motsvarande regler för kvadratroten.

Räkneregler för *n*-te rötter

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, för $a \geq 0$ om n är jämnt, för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ om n är jämnt.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ och $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Exempel. Här är några exempel på hur man tillämpar räknereglerna.

(a) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6\cdot 3]{2} = \sqrt[18]{2}$

(b) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[4\cdot 3]{5^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt[4]{5}$

(c) $\sqrt[2n]{a^2} = \sqrt[n]{\sqrt[2]{a^2}} = \sqrt[n]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[n]{|a|}$ □

För uttrycken $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a+b}$ och $\sqrt[n]{a-b}$ finns inga allmänna formler. Exempelvis är i allmänhet

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

1.7.3 Övningar

1.7.1 Förenkla

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt[6]{8}$ c) $\sqrt[3]{-24}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ e) $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$

g) $4/\sqrt[3]{16}$ h) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.7.2 Bestäm de *reella* rötterna till

a) $x^8 = 16$ b) $x^5 = 243$ c) $64x^6 - 27 = 0$

d) $x^3 + 8 = 0$ e) $x^4 + 8 = 0$

1.7.3 Förenkla:

a) $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$ b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ e) $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ f) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.8 Potenser med rationell exponent

I detta avsnitt definieras vad som menas med en potens med rationell exponent. Definitionen bygger både på potens med heltalsexponent (avsnitt 1.3) och på definitionen av n-te roten som gjordes i föregående avsnitt.

1.8.1 Potenser med rationell exponent

Definition: Om $\dfrac{m}{n}$ är ett rationellt tal och $b \geq 0$ är ett reellt tal så ges $b^{\frac{m}{n}}$ av

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Speciellt är $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$. Exempelvis gäller för *kvadratroten*, att

$$\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{\frac{1}{2}}.$$

Vi har också (som tur är) att $b^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{b^m} = b^m$. Om inte detta gällt hade definitionen varit misslyckad.

Om n är ett udda heltal så är $\sqrt[n]{b}$ definierat även för $b < 0$. Man använder därför ofta skrivsättet $b^{\frac{1}{n}}$ för udda n även då $b < 0$. Här krävs stor försiktighet. Man måste vara medveten om att definitionen $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ endast gäller för $b \geq 0$. Att det inte går att definiera potens med rationell exponent för negativa tal framgår av följande exempel.

Exempel. Vi har att $\left({}^{-}27\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{{}^{-}27} = {}^{-}3$. Men vi har också att $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$. Om man skulle tillämpa definitionen av $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ med $b = {}^{-}27$ får man

$$\left({}^{-}27\right)^{\frac{1}{3}} = \left({}^{-}27\right)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{({}^{-}27)^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3.$$

vilket ger fel tecken. □

1.8.2 Räkneregler

Med hjälp av räknereglerna för n-te roten ur ett positivt tal och räknereglerna för potenser med heltalsexponent kan man visa att *potensuttrycket* $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent för $b > 0$ satisfierar samma *potenslagar* som potens med heltalsexponent (se avsnitt 1.3.3).

Potensregler

För alla positiva reella tal a och b och alla rationella tal x och y gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$, om $b > 0$.
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Exempel. Här är några exempel på hur man tillämpar räknereglerna.

(a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

(b) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{1/3})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

(c) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$ □

1.8.3 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1c

1.8.1 Förenkla

a) $27^{1/3}$ b) $4^{-0,5}$ c) $(\sqrt{8})^{2/3}$

d) $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$ e) $3^{1/2}/9^{-3/4}$ f) $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$

g) $(0,0016)^{-0,25}$

1.8.2 Förenkla *a)* $\sqrt[6]{9}$ *b)* $\sqrt[6]{8}$ *c)* $\sqrt[3]{-24}$ *d)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ *e)* $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$ *g)* $4/\sqrt[3]{16}$ *h)* $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.8.3 Förenkla: *a)* $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$
b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ *c)* $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$ *d)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ *e)* $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ *f)* $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.9 Algebraiska omskrivningar

Oerhört många resonemang, i såväl matematik som andra sammanhang där matematiken tillämpas, bygger på omskrivningar av matematiska uttryck. Ofta handlar det om att förenkla uttrycket, men minst lika ofta gäller det att skriva uttrycket på den mest lämpade formen. Vilken denna form är beror naturligtvis på situationen.

Vid algebraiska omformningar får man utnyttja alla de räkneregler som gäller vid räkning med reella tal. Man bör därför vara synnerligen väl förtrogen med dessa. Speciellt de som behandlats i samband med heltal i avsnitt 1.1.3, rationella tal i avsnitt 1.2.3 och potenser i avsnitt 1.8.2.

När man skriver produkter med variabler inblandade utelämnar man ofta multiplikationssymbolen. Produkten $6 \cdot a$ skrivs ofta $6a$, $a \cdot b \cdot c$ skrivs abc o s v. Då man utelämnar multiplikationssymbolen måste man vara säker på att detta inte orsakar missuppfattning, abc kan mycket väl vara *en* variabel istället för en produkt av tre variabler. Hur skall $2m + 10cm$ tolkas? Betyder det $210cm$ eller

$$2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m = 2 \cdot (1 + 10 \cdot c) \cdot m?$$

Det beror helt på sammanhanget. I detta kapitel skall abc tolkas $a \cdot b \cdot c$ och $2m + 10cm$ betyder $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$.

Exempel. Här är några exempel på hur man med de vanliga räknereglerna kan förenkla algebraiska uttryck.

a) $10m - 9y + 5y + 7m + 4y - m = (10 + 7 - 1)m + (^{-}9 + 5 + 4)y = 16m + 0 \cdot y = 16m$

b) $m - [a - b - (c - m)] = m - [a - b - c + m] = m - a + b + c - m = b + c - a$

c) $3abc \cdot a^3bc^2 \cdot {}^-(4b^2) = 3 \cdot ({}^-4) \cdot a \cdot a^3 \cdot b \cdot b \cdot b^2 \cdot c \cdot c^2 = {}^-12a^4b^4c^3$

d) $(3x^2y^3z)^4 = 3^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 \cdot z^4 = 81x^8y^{12}z^4$

e) $(2x+3)(4x^2 - 6x + 9)$

$$\begin{aligned}
&= 2x \cdot (4x^2 - 6x + 9) + 3 \cdot (4x^2 - 6x + 9) \\
&= 2x \cdot 4x^2 - 2x \cdot 6x + 2x \cdot 9 + 3 \cdot 4x^2 - 3 \cdot 6x + 3 \cdot 9 \\
&= 8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27 = 8x^3 + 27
\end{aligned}$$

□

1.9.1 Några viktiga algebraiska identiteter

Utöver räknereglerna finns det en hel del samband som man behöver kunna använda. De flesta är sådana att man behöver kunna dem *aktivt*. Det räcker inte att veta att de finns och kunna slå upp dem i en formelsamling. För att kunna räkna ”med flyt” krävs en hel del utantillkunskap.

Följande viktiga identiteter behöver man kunna utantill:

Kvadreringsreglerna:	$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$
Konjugatregeln:	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$
Kuberingsreglerna:	$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$
Faktoruppdelningarna:	$\begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$

Exempel. Här följer först tre exempel på hur man kan använda reglerna för att utveckla en potens och sedan tre exempel på det omvända då man faktoriserar ett uttryck.

a) $(3a + 4b)^2 =$ [kvadreringsregeln] $= (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$

b) $(3 + x^2)(x^2 - 3) = (x^2 + 3)(x^2 - 3) =$ [konjugatregeln] $= (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$

c) $(x - 2y)^3 =$ [kuberingsregeln]

$$= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

d) $4x^2 - 9a^4 = (2x)^2 - (3a^2)^2 =$ [konjugatregeln] $= (2x+3a^2)(2x-3a^2)$

e) $12x^4 - 2x^5 - 18x^3 =$ [alla gemensamma faktorer brytes ut]
$$\begin{aligned} &= 2x^3 \cdot (6x - x^2 - 9) = -2x^3(x^2 - 6x + 9) \\ &= \text{[kvadreringsregeln]} = -2x^3 \cdot (x-3)^2 \end{aligned}$$

f) $x^4 + 8xy^6 = x \cdot (x^3 + 8y^6) = x \cdot \left(x^3 + (2y^2)^3\right)$
$$\begin{aligned} &= [\text{ enligt formeln för } (a^3+b^3)] = x \cdot (x+2y^2)(x^2 - x \cdot 2y^2 + (2y^2)^2) \\ &= x \cdot (x+2y^2)(x^2 - 2xy^2 + 4y^4) \end{aligned}$$
□

Exempel. Här är ett par numeriska exempel på hur man kan använda räknereglerna för att beräkna kvadraten av ett tal med enkla räkningar.

a) $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529.$

b) $29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 841.$

c) $37^2 - 33^2 = (37-33) \cdot (37+33) = 4 \cdot 70 = 280$ □

OBS: Uttrycket $a^2 + b^2$ (liksom $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$) kan **ej** faktoruppdelas (med reella tal).

En generalisering av formeln för $a^3 - b^3$ är *allmänna konjugatregeln*.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

som visas genom att multiplicera ihop parenteserna i högra ledet.

1.9.2 Pascals triangel och $(a+b)^n$

Koefficienterna i utvecklingen av $(a+b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$$\begin{array}{r ccccccccccc l}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{osv}
\end{array}$$

Raden med $n = 3$ ger kuberingsregeln

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

och raden med $n = 5$ innebär att

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

Ett tal i triangeln erhålles genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför. För att inse att detta ger koefficienterna i utvecklingen kan vi se på $(a+b)^4$. Vi har ju att $(a+b)^4 = (a+b) \cdot (a+b)^3$. Men $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Alltså är

$$(a+b)^4 = a \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$$

Man får en term a^3b ur båda produkterna, dels $b \cdot a^3$, dels $a \cdot 3a^2b$. Koefficienten för a^3b är alltså summan av koefficienterna för a^3 och a^2b. På samma sätt fungerar det för alla övriga termer också.

Exempel. Här är tre ytterligare exempel på hur man använder Pascals triangel.

a) $(a-b)^4 = (a + {}^-b)^4$

$$\begin{aligned} &= a^4 + 4a^3({}^-b) + 6a^2({}^-b)^2 + 4a({}^-b)^3 + ({}^-b)^4 \\ &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

b) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

c) $(2a+b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 + b^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$ □

1.9.3 Rationella uttryck

Räkning med rationella uttryck följer samma räkneregler som räkning med rationella tal. Vid addition är det lämpligt att förlänga med ”så lite som möjligt”. Man bestämmer i så fall minsta gemensamma nämnare i stället för att ”multiplicera korsvis” på liknande sätt som vi gjorde för rationella tal. För att bestämma minsta gemensamma nämnare behöver man faktoruppdela de olika termernas nämnare. I detta avsnitt med hjälp av kvadrerings-, kuberings- eller konjugatreglerna. Senare kommer vi även ta hjälp av faktorsatsen och polynomdivision.

Exempel. Här är ett antal exempel på förenklingar av rationella uttryck.

a) En användbar regel är

$$\frac{b-a}{c} = \frac{{}^-(a-b)}{c} = {}^-\left(\frac{a-b}{c}\right),$$

som ger att

$$\frac{b-a}{a^2-b^2} = -\left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = -\left(\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}\right) = -\left(\frac{1}{a+b}\right)$$

b) $\dfrac{30x^4y^7}{12xy^{10}} = \dfrac{2\cdot 3\cdot 5\cdot x^{4-1}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot y^{10-7}} = \dfrac{5x^3}{2y^3} = \dfrac{5}{2}\cdot x^3\cdot y^{-3}$

c) $\dfrac{x-y}{xy-x^2} = \dfrac{x-y}{x(y-x)} = -\left(\dfrac{y-x}{x(y-x)}\right) = -\dfrac{1}{x}$

d) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\div\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a^2}\right) = \dfrac{(a^2+b^2+2ab)}{ab}\div\dfrac{(a^2-b^2)}{a^2b}$

$$= \frac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)} = \frac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)a}{a-b}$$

e) $\dfrac{5}{2x-2} - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{3x+1}{1-x^2} =$ [faktoruppdela nämnarna] $=$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{3x} - \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)} \\
&= [\text{minsta gemensamma nämnare är } 2\cdot 3\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)] \\
&= \frac{5\cdot 3x(x+1)}{2(x-1)\cdot 3x(x+1)} - \frac{1\cdot 2(x+1)(x-1)}{3x\cdot 2(x+1)(x-1)} - \frac{(3x+1)\cdot 2\cdot 3x}{(x+1)(x-1)\cdot 2\cdot 3x} \\
&= \frac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot 3\cdot x(x+1)(x-1)} = \frac{-5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)} \\
&= -\left(\frac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}\right)
\end{aligned}$$

□

1.9.4 Rotuttryck

Vid omskrivning av rotuttryck kan man givetvis använda alla de räkneregler som gäller för reella tal. Det man speciellt skall tänka på är $(\sqrt{a})^2 = a$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exempel. Här är två exempel på förenklingar av rationella rotuttryck

a) $\dfrac{3-c}{\sqrt{c-3}} = -\dfrac{c-3}{\sqrt{c-3}} = -\dfrac{\left(\sqrt{c-3}\,\right)^2}{\sqrt{c-3}} = -\sqrt{c-3}$ om $c > 3$.

Observera att uttrycket $\sqrt{c-3}$ är definierat om $c-3 \geq 0$, d v s om $c \geq 3$, men $1/\sqrt{c-3}$ är definierat endast om $c > 3$.

b) $$\frac{a}{\sqrt{a^2+a^3}} = \frac{a}{\sqrt{a^2(1+a)}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1+a}}$$
$$= \frac{a}{|a|\sqrt{1+a}} = \begin{cases} 1/\sqrt{1+a} & \text{om} \quad a>0, \\ -1/\sqrt{1+a} & \text{om} \quad -1<a<0. \end{cases}$$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck!

□

1.9.5 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 1d

1.9.1 Förenkla

a) $10t - 14u + 7v - t - 8v + 14u - 8v - u$

b) $70a + 20c + 33x + c - x - 28a - 40a - 9c + 41x$

1.9.2 Förenkla

a) $m + 2p - (m + p - r)$

b) $3c - (2a + c - 5b) - (2b - 2a)$

c) $7a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)]$

1.9.3 Förenkla

a) $2xz^7 \cdot 10xz$

b) $a^2b^4c \cdot ({}^-3ac^2) \cdot 9abc$

c) ${}^-2p^2qr \cdot pq^7s^2 \cdot ({}^-7qr^3)$

1.9.4 Förenkla

a) $(3x^2y)^3$

b) $(4ab^2c^3)^2({}^-2a^2b)^3$

c) $(a^2)^p \cdot (a^pb^{3p})^2 \cdot b^p$

1.9.5 Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

a) $(2x - y)(x + 2y)$

b) $(2x - y)(x + 2y)(x - y)$

c) $(a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)$

d) $(x^2 - 2x + 3)(2 - 3x - 2x^2)$

1.9.6 Utveckla

a) $(3a-4b)^2$ b) $(a^3+2b^2)^2$

c) $(m^4+4)^2+(m^4-4)^2$

1.9.7 Förenkla

a) $(6-x)(x+6)$ b) $(a^2+y)(a^2-y)$

c) $(x^3+3)(x^3-3)(x^6+9)$

1.9.8 Utveckla

a) $(y+3x)^3$ b) $(3x+2y^2)^3$ c) $(x^4-6x)^3$

1.9.9 Uppdela i faktorer

a) x^2-a^4 b) $9x^4-25x^2$

c) $18x+81+x^2$ d) $x^4y+4x^2y^3-4x^3y^2$

e) x^4-x f) $3a^3+81b^3$

g) x^2-x^6 h) $54x^2y^7-16x^5y$

1.9.10 Utveckla

a) $(x-1)^5$ b) $(1-y)^7$ c) $(2x+a^2)^5$ d) $(xy^2-3z)^6$

1.9.11 Förenkla

a) $\dfrac{6a^7b^3c}{16ab^3c^3}$ b) $\dfrac{32x^ny^p}{36x^{n+1}y^{p-1}}$

c) $\dfrac{2ay+y^2}{2ay}$ d) $\dfrac{12x^2y^2+20xy^2-8x^2y}{4xy}$

1.9.12 Förenkla

a) $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ b) $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$

c) $(x-y)^3/(y-x)^5$ d) $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$

e) $(a^3-b^3)/(b-a)^2$ f) $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$

g) $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

1.9.13 Förkorta (om möjligt)

a) $(a^3+b^3)/(a+b)$ b) $(a^4-b^4)/(a-b)$

c) $(a^4+b^4)/(a+b)$ d) $(a^5-b^5)/(b-a)$

1.9.14 Förenkla

a) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y^2}{x}\right)\div\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y^2}\right)$ b) $\left(1-\frac{1}{x^4}\right)\div\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$

c) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-2+\frac{x-y}{x+y}\right)$

d) $\left(\frac{1/a}{b}-\frac{1/b}{a}+\frac{1}{2b/a}+\frac{2}{a/b}\right)\div\left(\frac{a^2+4b^2}{ab}\right)$

1.9.15 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

a) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x}$ b) $1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2-4x}$

c) $\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{1-x^2}$ d) $\frac{1}{x^3-8}+\frac{1}{2x^2-8}+\frac{1}{8-4x}$

1.9.16 Förenkla och avgör för vilka värden på c som likheten gäller.

a) $\sqrt{c^2+4c+4}$ b) $c/\sqrt{c^2}$ c) $(\sqrt{c})^2/c$

d) $(c^2-9c)/\sqrt{9-c}$ e) $c/\sqrt{c^3-2c^2}$ f) $\sqrt{c^3+2c^2}/c$

2 Ekvationer

Inledningsvis ska vi diskutera vad en ekvation är och hur den kan dyka upp vid problemlösning. Vi ska inte alls oroa oss för hur man löser dem. Det kommer i de följande avsnitten.

En ekvation är helt enkelt en likhet som (i regel) innehåller en eller eventuellt flera obekanta variabler. Vi tar några enkla exempel.

Exempel. Likheten $21-x=x-3$ är en ekvation med en obekant x. Om det är en enda obekant i ekvationen så brukar man ofta av tradition använda bokstaven x, men det går lika bra med vilken bokstav (symbol) som helst. Likheten $g^2-g=1$ är en ekvation med en obekant som heter g.

Det är vanligt också med ekvationer med flera obekanta. Likheten $3x+2y=31$ är en ekvation som innehåller två obekanta x och y.

Likheten $8=5+3$ är en ekvation som inte innehåller några obekanta utan enbart tre mycket bekanta heltal. □

Vad ska man då ha ekvationer till? En ekvation använder man till att beskriva ett samband. Ofta innehåller den någonting som är obekant och i många fall är målet just att bestämma vad denna obekanta storlek är. I andra fall beskriver ekvationen något objekt, så t ex är $y=2x+3$ ekvationen för en rät linje, d v s lösningarna (x,y) till denna utgör en linje. Vi tar en titt på några exempel på problem som man kan ha nytta av en ekvation för att lösa.

Exempel. Kal har en storasyster som heter Ada. Skillnaden på dem i ålder är lika många år som Kal fyllde för 3 år sedan. Ada är 21 år gammal. Hur gammal är Kal?

Lösning. Vi betecknar Kals nuvarande ålder med x. Skillnaden mellan deras ålder är då $21-x$ och för 3 år sedan fyllde Kal $x-3$. En ekvation som beskriver sambandet är alltså $21-x=x-3$. □

Exempel. Vi söker nu ett tal med den "magiska" egenskapen att om man ifrån kvadraten av talet subtraherar talet själv så får man exakt 1. Vilket är talet?

Lösning. Vi betecknar det okända talet med g. Subtrahera talet själv ifrån kvadraten av talet är g^2-g och detta skulle bli 1. Alltså får vi ekvationen $g^2-g=1$. □

Exempel. Beda är i godisaffären för att köpa lördagsgodis. Hon köper 3 likadana chokladkakor och 2 likadana tablettaskar. Hon betalar 31 kronor. Hur mycket kostar chokladkakorna respektive tablettaskarna per styck?

Lösning. Vi betecknar priset på chokladkakan med x och priset på en tablettask med y. Det totala priset på Bedas lördagsgodis blir då $3x+2y$. Hon betalade 31 kronor så vi får alltså ekvationen $3x+2y=31$. □

2.1 Förstagradsekvationer

Vi ska nu börja titta på hur man löser ekvationer. Det är viktigt att veta vad man får göra med en ekvation och vad man inte får göra. I det här avsnittet behöver vi bara följande 3 grundläggande regler. Det är tillåtet att

1. addera eller subtrahera samma sak från båda sidor av likheten,
2. multiplicera eller dividera båda sidorna med något som inte är 0,
3. förenkla de två sidorna av likheten var för sig.

Alla dessa tre operationer leder till en *ekvivalent* ekvation, d v s en ekvation som har samma lösningar som den ursprungliga.

Vi börjar med den allra enklaste typen av ekvationer, så kallade linjära ekvationer. Man säger att en ekvation är linjär om det är så att det enda man gjort med de obekanta är att man multiplicerat dem med ett tal och sedan adderat eller subtraherat de olika termerna med varandra och med tal.

Exempel. Ekvationen $21-x=x-3$ är linjär för den enda obekanta variabeln x har bara adderats och subtraherats med tal. Samma sak för $3x+2y=31$ där de två obekanta bara multiplicerats med tal.

Däremot är ekvationen $g^2-g=1$ inte linjär då den obekanta variabeln g här har multiplicerats med sig själv. Inte heller ekvationen $xy=1$ är linjär då man här multiplicerat de två obekanta med varandra. □

Linjära ekvationer är det enklaste som finns att lösa. Vi börjar med att titta på linjära ekvationer med 1 obekant som vi kallar x. Strategin är enkel. Samla alla termer som innehåller x på en sida och alla tal på den andra.

Exempel. Vi löser ekvationen $21-x=x-3$:

$$21-x=x-3 \iff (21-x)+x=(x-3)+x \iff 21=2x-3 \iff$$

$$21+3=(2x-3)+3 \iff 24=2x \iff \frac{24}{2}=\frac{2x}{2} \iff 12=x.$$

Här betyder dubbelpilen $\iff$ att ekvationerna är ekvivalenta. Vi ser alltså att ekvationen har en enda lösning, nämligen $x=12$. (Därmed vet vi alltså att Kal ifrån exemplet i förra avsnittet är 12 år.)

Vi löser nu ekvationen $21+x=x-3$:

$$21+x=x-3 \iff (21+x)-x=(x-3)-x \iff 21=-3.$$

Här försvann x och kvar fick vi bara orimligheten $21=-3$. Inget x i världen kan få den likheten att gälla, alltså saknar ekvationen lösning.

Avslutningsvis löser vi ekvationen $12-(x-3)=15-x$:

$$12-(x-3)=15-x \iff 12-x+3=15-x \iff 15-x=15-x \iff 15=15.$$

Denna sista likhet gäller uppenbarligen alltid, så till denna ekvation är vilket värde som helst på x en lösning. Den har alltså oändligt många lösningar. $\square$

Vi såg i exemplet att en linjär ekvation med 1 obekant kunde ha 1, 0 eller oändligt många lösningar och detta är faktiskt de enda möjligheterna som finns. Vi ska nu titta på en linjär ekvation med fler än 1 obekant. Här blir strategin att välja ut en av variablerna att lösa ut (få ensam på ena sidan) på samma sätt som vi gjorde med x ovan.

Exempel. Vi löser ekvationen $3x+2y=31$ genom att lösa ut y:

$$3x+2y=31 \iff (3x+2y)-3x=31-3x \iff 2y=31-3x \iff y=\frac{31-3x}{2}.$$

Här ser vi att för varje x vi väljer så får vi precis ett y nämligen $y=(31-3x)/2$. Vi får alltså oändligt många par av lösningar. Två möjliga lösningar är t ex $x=5, y=8$ eller $x=6, y=13/2$.

Denna ekvation var ju den vi hade i förra avsnittet då Beda köpte ett antal chokladkakor och tablettaskar. Vi ser nu när vi löser ekvationen att det inte finns unik lösning och därför räcker inte informationen till att räkna ut vad godiset kostar per styck. $\square$

Om man har en linjär ekvation med fler än 1 obekant så får man alltid oändligt många lösningar (eller ingen lösning alls om alla obekanta försvinner när man förenklar).

2.1.1 Övningar

2.1.1 Lös följande ekvationer.

a) $3(2-x)=-(1+2x)$ b) $3(5-3x)-2(4-x)=10$

c) $3(5-3x)-2(4-x)=7-7x$ d) $3(5-3x)-2(4-x)=6-7x$

2.1.2 Lös ut y i följande ekvationer.

a) $3(2-x)=-(1+y)$ b) $3(5-3y)-2(4-x)=10+2y$

2.2 Andragradsekvationer

Också andragradsekvationer förenklar man genom att addera eller subtrahera samma tal till båda sidor av ekvationen, multiplicera eller dividera båda leden med tal ($\neq 0$), eller göra omskrivningar.

Den enklaste typen av andragradsekvationer, $x^2 = a$ där a är ett positivt tal, kan man lösa helt utan kalkyler. Vi har ju att $\sqrt{a}$ är det positiva tal vars kvadrat är a, $(\sqrt{a})^2 = a$ om $a > 0$. Eftersom det också gäller att $(-\sqrt{a})^2 = a$ så har ekvationen de två lösningarna $\sqrt{a}$ och $-\sqrt{a}$. Att det inte kan finnas fler lösningarna återkommer vi till i avsnitt 2.5. T ex har ekvationen $x^2 = 9$ alltså de två lösningarna $x_1 = \sqrt{9} = 3$ och $x_2 = -3$.

Exempel. Förhållandet mellan de två sidorna i en rektangel är 2:3. Om kortsidan är 10 m är alltså långsidan 15 m. Vi skall bestämma sidlängderna då arean är 54 m^2.

Lösning. Om kortsidan är $2a$ m så är långsidan $3a$ m och arean $6a^2$ m^2. Alltså skall a vara lösning till $6a^2 = 54$. Division med 6 ger $a^2 = 9$ vars lösningar är 3 och -3. Endast positiva lösningen kan vara relevant så rektangelsidorna är 6 respektive 9 m. $\square$

Den näst enklaste typen av andragradsekvationer är $(x-b)^2 = a$ där a är ett positivt tal. Här är $x-b$ ett tal vars kvadrat är a. Då är $x-b = \sqrt{a}$ eller $x-b = -\sqrt{a}$. Lösningarna till $(x-b)^2 = a$ är således

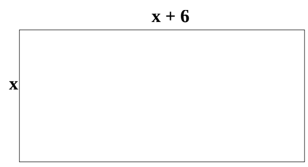
$$x_1 = b + \sqrt{a} \ \text{ och } \ x_2 = b - \sqrt{a}.$$

Exempel. Ekvationen $(x-2)^2 = 9$ har de två lösningarna som ges av $x-2 = \sqrt{9} = 3$ och $x-2 = -\sqrt{9} = -3$. Alltså är $x_1 = 5$ och $x_2 = -1$. $\square$

Exempel. Långsidan i en rektangel är 6 meter längre än kortsidan. Bestäm sidlängderna då arean är 55 m^2.

Lösning.

Antag att kortsidan är x m. Då är långsidan $x+6$ m och arean $x(x+6)$ m^2. Vi söker således en lösning till ekvationen $x(x+6) = 55$. Utveckling ger



$$x(x+6) = 55 \iff x^2 + 6x = 55.$$

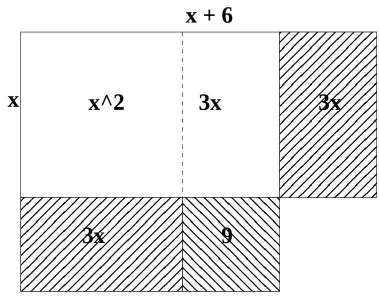
Genom att addera 9 till vänsterledet $x^2 + 6x$ blir uttrycket en jämn kvadrat

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = (x+3)^2.$$

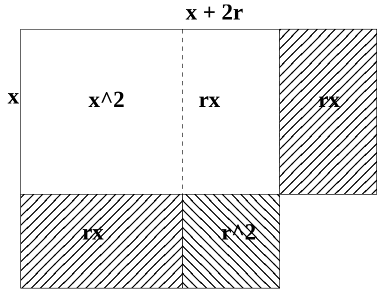
Vi adderar därför 9 till båda sidor av ekvationen och får

$$\begin{aligned} x(x+6) = 55 \quad &\iff \quad x^2 + 6x = 55 \iff x^2 + 6x + 9 = 55 + 9 \iff (x+3)^2 = 64 \\ &\iff \quad x+3 = 8 \ \text{ eller } \ x+3 = -8 \iff x = 5 \ \text{ eller } \ x = -11. \end{aligned}$$

Eftersom endast positiv lösning är möjlig så får vi $x = 5$. Sidorna är med andra ord 5 respektive 11 m. □



Metoden i sista exemplet kallas *kvadratkomplettering*. Genom att addera en kvadrat med arean 9 m^2 gör vi om rektangeln till en kvadrat med sidan $x+3$. Rektangeln har arean 55 m^2, kvadraten har arean 64 m^2.



På samma sätt kan man kvadratkomplettera alla andragradsuttryck. Uttrycket

$$x^2 + 2rx = x(x+2r)$$

kan ses som arean av en rektangel med sidorna x och $x+2r$. Genom att addera en kvadrat med sidan r erhåller man en kvadrat med sidan $x+r$.

Med hjälp av kvadratkomplettering härleder vi nu en välkänd formel för lösningarna till vilken andragradsekvation som helst

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x = -q \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
&\Longleftrightarrow \quad x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ eller } x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}$$

som ger:

Andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Resultatet ovan har du säkert använt många gånger. Ofta skrivs det med *en* formel:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Den är inte så svår att memorera, men minnet blir lätt lite diffust efter ett tag. Därför är det betydligt bättre om du även kan kvadratkomplettera och på det viset komma fram till lösningen utan att använda formeln. Tecknet $\pm$ är praktiskt vid kalkyler men man bör alltid ange de två rötterna separat.

Exempel. Vi löser två andragradsekvationer genom att använda formeln vi precis härledde.

a) Ekvationen $x^2 + 6x + 5 = 0$ har rötterna

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 5} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2$$

d v s $x_1 = -3 + 2 = -1$ och $x_2 = -3 - 2 = -5$.

b) Observera att i ekvationen i formeln för lösningarna är koefficienten framför x^2 lika med 1. Ekvationen $6 + 3x - 4x^2 = 0$ har koefficenten -4 framför x^2, så för att använda formeln måste vi först dividera med -4 vilket ger

$$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Denna har rötterna

$$x_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9+96}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{105}}{8}.$$

Alltså är $x_1 = (3 + \sqrt{105})/8$ och $x_2 = (3 - \sqrt{105})/8$. $\square$

Observera! Det är inte alltid nödvändigt att räkna för att bestämma en ekvations rötter. Detta illustreras av följande exempel.

Exempel. Ekvationen $(x-1)(x+3) = 0$ har de två lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$. Detta förklaras av att en produkt av två tal är 0 om minst ett av talen är 0, men inte annars. Produkten $(x-1)(x+3)$ är alltså 0 precis då $x - 1 = 0$ eller $x + 3 = 0$ vilket ger de två lösningarna.

På samma sätt ser vi att ekvationen $x^2 + px = 0$ har de två lösningarna $x_1 = 0$ och $x_2 = -p$, eftersom $x^2 + px = x(x+p)$. $\square$

Anmärkning: Om vi multiplicerar ihop de två termerna får vi att $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$. Ekvationen $x^2 + 2x - 3 = 0$ har alltså de två rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$.

Det vi ser här är ett generellt fenomen: ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna x_1 och x_2 om och endast om vi har en *faktoruppdelning*

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Detta ger både en möjlighet att kontrollera att rötterna är korrekta och en möjlighet att enkelt gissa heltalsrötter. Notera speciellt att produkten av rötterna uppfyller $x_1 x_2 = q$ och summan av dem $x_1 + x_2 = -p$.

Observera! En ekvation $x^2 = a$, där a är ett negativt tal, saknar reella rötter. Det finns ju inte något reellt tal vars kvadrat är negativ. Däremot finns det *komplexa* lösningar. Ekvationen $x^2 = -4$ har lösningarna $x_1 = 2i$ och $x_2 = -2i$ där i är den *imaginära enheten*. Genom kvadratkomplettering ser vi att ekvationen $x^2 + 2x + 2 = 0$ har rötterna $x_1 = -1 + i$ och $x_2 = -1 - i$. Vi återkommer till detta i ett senare kapitel. Här och nu är vi endast intresserade av reella lösningar.

2.2.1 Övningar

2.2.1 Lös ekvationerna

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $3 + 2x - x^2 = 0$ c) $2x^2 = 3 + x$

d) $3x + 7x^2 = 0$ e) $4x^2 + 9 = 12x$ f) $5x^2 + 3x = 1$

2.2.2 Kvadratkomplettera

a) $x^2 + 4x + 1$ b) $4x^2 - 36x + 100$ c) $3 - 12x - x^2$

2.2.3 Faktoruppdela (med reella tal)

a) $x^2 + x - 6$ b) $8 - 6x - 2x^2$

c) $x^2 - x - 1$ d) $x^2 + x + 1$

2.2.4 Bestäm en andragradsekvation med rötterna

a) 2 och -5 b) $-\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$ c) $1 + \sqrt{5}$ och $1 - \sqrt{5}$

2.3 Ekvationer som leder till andragradsekvationer

En del ekvationer kan överföras till en andragradsekvation genom en algebraisk omskrivning. Det är dock viktigt att tänka sig för när man gör omskrivningar. Det kan nämligen inträffa både att man skapar nya *falska* rötter och att man tappar bort rötter.

Om en ekvation multipliceras med en faktor, som innehåller den obekanta variabeln, kan man få extra rötter. Ekvationen $(x-1)(x-2)=0$ har rötterna $x_1=1$ och $x_2=2$. Om vi multiplicerar med $x-3$ får vi ekvationen $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ som har ytterligare en rot $x_3=3$.

På samma sätt leder ofta division till att rötter tappas bort. Ekvationen $x^2+4x=0$ har rötterna $x_1=0$ och $x_2=-4$. Division med x leder till ekvationen $x+4=0$, roten $x_1=0$ tappas bort.

Det är därför extra viktigt att pröva de erhållna rötterna i den givna ekvationen och, naturligtvis, tänka sig noga för då man dividerar med en faktor som innehåller den obekanta. Man ska alltid ställa sig frågan: När är det jag dividerar med lika med 0?

För ekvationer som innehåller rationella uttryck är det nästan alltid en bra idé att multiplicera ekvaionen med minsta gemensamma multipel av nämnarna. Det gäller då att vara medveten om att detta kan introducera nya falska rötter.

Exempel. Vi löser ekvationen $x-\dfrac{8}{x+2}=0$.

Lösning. Ekvationen innehåller ett rationellt uttryck och vi multiplicerar därför med nämnaren $x+2$. Rötterna till den nya ekvationen $x(x+2)-8=0$ bestäms med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} x(x+2)-8=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2+2x=8 \Longleftrightarrow x^2+2x+1=9 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x+1)^2=9 \Longleftrightarrow x_{1,2}=-1\pm 3. \end{aligned}$$

Rötterna är alltså $x_1=2$ och $x_2=-4$. Vi prövar dessa i ursprungsekvationen och finner att båda är korrekta. (Eftersom vi multiplicerade med $x+2$ är enda möjliga falska roten -2. Kontrollen var logiskt sett överflödig, men man bör *alltid* kontrollera genom insättning. Då upptäcker man ju också om man råkat göra ett räknefel.) $\square$

Vissa ekvationer, som innehåller rottecken kan överföras till en andragradsekvation genom att de båda leden kvadreras. Detta bygger på att om a och b är positiva tal och $b=\sqrt{a}$ så är $b^2=a$. Notera att om b är ett negativt tal och $b=-\sqrt{a}$ så är också $b^2=a$. Den kvadrerade ekvationen *kan* ha fler rötter än den givna.

Exempel. Vi löser ekvationen $\sqrt{2x+143}=x$.

Lösning. Vi noterar först att eftersom $\sqrt{2x+143}\geq 0$ så måste $x\geq 0$. Ekvationen kvadreras. Den nya ekvationen $2x+143=x^2$ skrivs om till

$$x^2-2x-143=0.$$

Denna har rötterna $x_{1,2}=1\pm\sqrt{144}=1\pm 12$. Roten $x_1=13$ är rot till givna ekvationen eftersom $\sqrt{2\cdot 12+143}=\sqrt{169}=13$. Däremot är $x_2=-11$ en *falsk rot*, eftersom vi redan från början noterade att det är nödvändigt med $x\geq 0$. Denna falska rot fås p g a kvadreringen och är rot till $\sqrt{2x+143}=-x$. $\square$

Exempel. Vi löser ekvationen $1+\sqrt{x^2+5}=2x$.

Lösning. För att vid kvadrering bli av med ett rotuttryck så måste detta vara ensamt på ena sidan i ekvationen. Vi skriver därför ekvationen som $\sqrt{x^2+5}=2x-1$. Kvadrering ger $x^2+5=(2x-1)^2$ som utvecklas till $x^2+5=4x^2-4x+1$, d v s

$$3x^2-4x-4=0.$$

Vi löser denna och får $x_1=2$ och $x_2=-2/3$. Nu måste prövning ske genom insättning i den givna ekvationen, eller *hellre* genom prövning i ekvationen $\sqrt{x^2+5}=2x-1$, varvid *endast tecknet behöver prövas*, eftersom $q^2=p \iff q=\sqrt{p}$ eller $q=-\sqrt{p}$:

Alternativet $x_1=2$ ger *högerledet*

$$HL=2x-1=2\cdot 2-1=4-1=3>0,$$

så $x_1=2$ *är* en rot till den givna ekvationen. För säkerhets skull kontrollerar vi även vänsterledet (vi kan ju ha räknat fel). Vi får

$$VL=\sqrt{x^2+5}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$$

vilket bekräftar att $x_1=2$ är en rot till den givna ekvationen.

Alternativet $x_2=-2/3$ ger

$$HL=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1<0.$$

Alltså är $x_2=-2/3$ en falsk rot.

Svar: Ekvationen har roten $x_1=2$. $\square$

Flera olika typer av ekvationer, t ex fjärdegradsekvationer som saknar x- och x^3-termer, vissa ekvationer som innehåller rotuttryck och en del andra, kan överföras till andragradsekvationer med lämpliga *substitutioner*.

En fjärdegradsekvation som saknar x- och x^3-termer, d v s en ekvation på formen

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

kan med substitutionen $x^2=z$ överföras till en andragradsekvation för z

$$az^2+bz+c=0.$$

Om denna andragradsekvation har de icke-negativa rötterna z_1 och z_2, så har den ursprungliga fjärdegradsekvationen de reella rötterna $x_{1,2}=\pm\sqrt{z_1}$ och $x_{3,4}=\pm\sqrt{z_2}$, ty $x^2=z$.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.

Lösning. Sätt $x^2 = z$. Då fås $z^2 - 20z + 64 = 0$ med rötter

$$z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100-64} = 10 \pm 6, \text{ d v s } z_1 = 16 \text{ och } z_2 = 4.$$

Eftersom vi satte $z = x^2$, så får vi att $x^2 = z_1 = 16$ ger $x_1 = 4$ och $x_2 = -4$, samt att $x^2 = z_2 = 4$ ger $x_3 = 2$ och $x_4 = -2$. Rötterna till $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ är alltså $4, -4, 2$ och -2. $\square$

Ibland är det enklast att lösa en ekvation som innehåller rottecken med hjälp av en substitution.

Exempel. Vi löser ekvationen $x + \sqrt{x} = 6$.

Lösning. Sätt $\sqrt{x} = z$. Då fås $z^2 + z = 6$ vars rötter är

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \text{ så } z_1 = 2 \text{ och } z_2 = -3.$$

Vi satte $z = \sqrt{x}$, så $\sqrt{x} = z_1 = 2 \Rightarrow x = 4$, medan $\sqrt{x} = z_2 = -3$ är orimligt.

Den givna ekvationen har en enda rot, $x = 4$. $\square$

2.3.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2a

2.3.1 Lös ekvationerna.

a) $x + 3 = 4 \cdot x^{-1}$ b) $x + 9x^{-1} = 12$ c) $3 + x^{-2} = x^{-1}$

2.3.2 Lös ekvationerna genom kvadrering.

a) $x - 6 = \sqrt{x}$ b) $x + 1 = \sqrt{x^2 + 5}$ c) $x - 2 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d) $3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x$ e) $x + 2\sqrt{x} = 8$

f) $\sqrt{x + 132} = x$ g) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} - x = 3$

h) $2x + \sqrt{x^2 + x} = 1$ i) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5}$

2.3.3 Lös ekvationerna.

a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ b) $1225 - 74x^2 + x^4 = 0$

c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ d) $24x^2 = 72 + 2x^4$

e) $6x^4 = 7x^2 + 3$

2.3.4 Lös ekvationerna med substitution.

a) $x - 6 = \sqrt{x}$ b) $x + 6\sqrt{x} = 1$ c) $x + 2 = 3\sqrt{x}$

2.4 Linjära ekvationssystem

Ibland har man flera ekvationer med flera obekanta, och man vill lösa ekvationssystemet, d v s hitta alla värden för de obekanta som uppfyller alla ekvationer samtidigt.

När man skall lösa ett sådant system försöker man genom *elimination* skaffa sig en ekvation, som endast innehåller en obekant. När man väl har löst denna kan man sätta in värdet i en av ursprungsekvationerna och lösa för den andra obekanta variabeln om det är två variabler. Om det är fler än två variabler får man upprepa eliminationen för en annan variabel.

Exempel. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1. \end{cases}$$

Metod 1: (Substitutionsmetoden) Man kan lösa ut x i den första ekvationen och få

$$x = \frac{5 - 2y}{3}.$$

När man sätter in detta (substituerar) i den andra ekvationen får man

$$7 \cdot \left(\frac{5 - 2y}{3} \right) + 3y = 1 \iff 35 - 14y + 9y = 3 \iff 32 = 5y$$

och därmed $y = 32/5$ och $x = (5 - 2y)/3 = -13/5$.

Metod 2: (Additionsmetoden) Multiplicera (för att eliminera x) de givna ekvationerna med 7 respektive -3 och addera:

$$\begin{cases} 21x + 14y = 35 \\ \underline{-21x - 9y = -3} \end{cases}$$
$$5y = 32$$

Här får man $y = 32/5$, som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger $x = -13/5$.

Svar: Vi får lösningen $x = -13/5$ och $y = 32/5$

Observera! Man bör alltid *kontrollera svaret* genom insättning i de givna ekvationerna. □

Anmärkning 1. I exemplet ovan gäller att:

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 7x+3y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5y=32 \end{cases}$$

där det högra ekvationssystemet är *triangulärt*, d v s koefficienterna för x och y bildar en triangel. När ett system är triangulärt, så är en av de obekanta redan eliminerad i sista ekvationen, så systemet är förberett för lösning.

Anmärkning 2. Det spelar ingen roll vilken av variablerna man eliminerar, så man kan börja med den som leder till de enklaste uttrycken. Variablerna kan ha andra namn än x och y, vilka som helst egentligen. Man kan dessutom utvidga metoderna till system med tre eller fler ekvationer (och tre eller fler variabler).

Exempel. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=9. \end{cases}$$

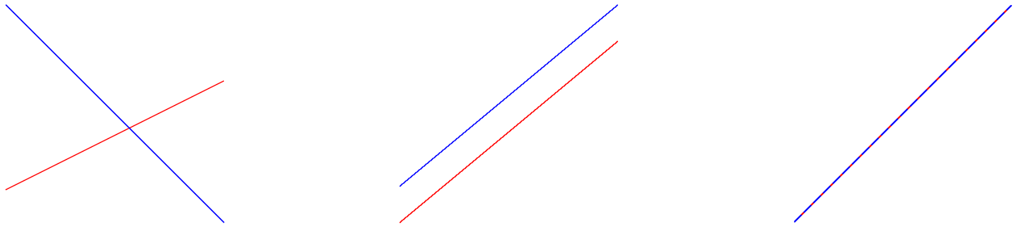
Lösning. Multiplicera (för att eliminera x) den första ekvationen med -2 och addera:

$$\begin{array}{rcl} -6x-4y & = & -10 \\ 6x+4y & = & 9 \\ \hline 0 & = & -1 \end{array}.$$

Här får vi en motsägelse och det betyder att ekvationssystemet saknar lösning. □

Anmärkning 3. Geometriskt motsvarar den linjära ekvationen $ax+by=c$ en *rät linje*. (Här är a,b,c fasta parameter och x,y variabler). Ett system av två sådana linjära ekvationer motsvarar alltså skärningspunkterna mellan två räta linjer. Detta har därmed

- *en* lösning om de räta linjerna är *skärande*,
- *ingen* lösning om de räta linjerna är *parallella* (och olika),
- *oändligt* många lösningar om de räta linjerna *sammanfaller*.



2.4.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2b

2.4.1 Lös ekvationssystemen.

a) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 2x-y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 7x+5y=-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 9x-6y=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x+y=3 \\ 10x+2y=6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 15s+14t=59 \\ 12s-35t=1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 1/x+1/y=5/6 \\ 1/x-1/y=1/6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 6x+5y+z=45 \\ 5x+2y-z=23 \\ 13x-7y+z=6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x-y+z=20,1 \\ x+y-z=9,9 \\ 3x+2y+8z=30,4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} a+2b+c=3 \\ a-b+2c=2 \\ 3a-2b+c=-3 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 5x+4y+z=0 \end{cases}$

2.4.2 En person som tillfrågades om sin ålder svarade: ”För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag blott 4 gånger så gammal.” Hur gammal var han? (Du kan behöva räkna med halvår.)

2.5 Polynom, ekvationer av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision

Vi ska nu titta lite på polynom. Polynom består av en summa av termer på formen ax^n, där *koefficienten* a är ett tal, *exponenten* $n \geq 0$ ett heltal (med andra ord ett naturligt tal) samt x en variabel. Den högsta exponenten n med koefficienten skild ifrån 0 i ett polynom kallas för *graden av polynomet*. (Istället för x kan man förstås använda en annan variabel om man så vill.)

Exempel. När vi löste andragradsekvationer så hade vi uttryck på formen x^2+3x+1. Detta är ett polynom av grad 2. Uttrycket x^4+3x^3+x är ett polynom av grad 4.

Däremot är **inte** uttrycken $x^2+x^{-1}+1$ eller $x^2+\sqrt{x}+1$ några polynom, eftersom exponenten i den andra termen i båda fallen inte är ett naturligt tal. $\square$

Vi låter $p(x)$ beteckna ett polynom och a ett tal. *Värdet i en punkt a* för polynomet är $p(a)$, d v s vi ersätter helt enkelt x med a. Ett *nollställe* till polynomet är ett tal b sådant $p(b)=0$.

Exempel. Låt $p(x)=x^2+3x+2$. Värdet i 2 är då $p(2)=2^2+3\cdot 2+2=12$ och värdet i -1 är $p(-1)=(-1)^2+3\cdot(-1)+2=0$. Alltså är -1 ett nollställe till polynomet. $\square$

Det finns ett viktigt samband mellan nollställen till ett polynom och faktorer till polynomet. Följande sats är mycket viktig att behärska för att kunna arbeta med polynom.

Faktorsatsen: Antag att $p(x)$ är ett polynom och a ett tal. Då är a ett nollställe till $p(x)$, d v s $p(a) = 0$, om och endast om $x - a$ är en faktor i $p(x)$, d v s

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom med grad ett mindre än $p(x)$.

Exempel. Vi såg i exemplet ovan att -1 är ett nollställe till polynomet $p(x) = x^2 + 3x + 2$. Enligt faktorsatsen vet vi därmed att

$$x^2 + 3x + 2 = (x - (-1)) \cdot q(x) = (x + 1) \cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom av grad 2-1=1. Alltså är $q(x) = kx + m$ för några tal k och m. Vi kan räkna ut vad $q(x)$ är genom att utnyttja likheten

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= (x + 1) \cdot q(x) = (x + 1)(kx + m) \\ &= kx^2 + kx + mx + m = kx^2 + (k + m)x + m. \end{aligned}$$

Genom att identifiera koefficienterna för x^2 får vi $k = 1$ och om vi identifierar konstanterna så får vi $m = 2$. En extra kontroll får man genom att man ser att koefficienterna för x är 3 respektive $k + m = 1 + 2 = 3$. Alltså är

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2),$$

och alltså är också -2 ett nollställe till polynomet. (Eventuellt kanske du kunde listat ut att det skulle vara just $x + 2$ direkt i huvudet?) $\square$

Metoden som användes i exemplet att hitta den andra faktorn när man känner en faktor i ett polynom kallas för *kort division*. Man kan alternativt använda sig av lång division med liggande stolen ungefär som för tal. Vi illustrerar de två metoderna i ytterligare ett exempel.

Exempel. Vi tittar på tredjegradspolynomet $x^3 - 9x + 10$. Genom att testa så ser vi att 2 är ett nollställe till polynomet, ty $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 0$. Därmed vet vi enligt faktorsatsen att $x - 2$ är en faktor och att $x^3 - 9x + 10 = (x - 2) \cdot q(x)$, där $q(x)$ är ett andragradspolynom.

Vi bestämmer först $q(x)$ med kort division. Vi har

$$x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c.$$

Koefficienten framför x^3 ger $a = 1$ och konstanten ger $10 = -2c$ så $c = -5$. Koefficienten framför x^2 ger nu $0 = -2a + b = -2 + b$ så $b = 2$. Kontroll med koefficienten framför x ger $-9 = -2b + c = -2 \cdot 2 - 5$ vilket stämmer alldeles utmärkt. Vi får alltså

$$x^3 - 9x + 10 = (x-2)(x^2 + 2x - 5).$$

Vi utför nu lång division med liggande stolen. Här bestämmer man successivt koefficienten för den högsta kvarvarande exponenten.

$$\begin{array}{l|l} \hline x^3-9x+10 & x-2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{x^2} \\ \hline x^3-9x+10 & x-2 \\ \hline -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{x^2+2x} \\ \hline x^3-9x+10 & x-2 \\ \hline -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \\ -2x(x-2) & \\ \hline -5x+10 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{x^2+2x-5} \\ \hline x^3-9x+10 & x-2 \\ \hline -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \\ -2x(x-2) & \\ \hline -5x+10 & \\ -(-5)(x-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

I första steget frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i täljaren d v s x^3. Jo, den går x^2 gånger. Vi skriver detta överst och subtraherar sedan $x^2(x-2)$ ifrån täljaren och får $2x^2 - 9x + 10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren d v s $2x^2$. Jo, den går $2x$ gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $2x(x-2)$ ifrån återstoden av täljaren och får $-5x + 10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren d v s $-5x$. Jo, den går -5 gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $-5(x-2)$ ifrån återstoden av täljaren och får 0. Därmed ser vi att resten blir 0 (det visste vi ju redan) och kvoten blir $x^2 + 2x - 5$. $\square$

Faktorsatsen kan man använda för att förkorta uttryck som består av en kvot av två polynom. För att förkorta ett sådant uttryck måste man hitta en gemensam faktor mellan de två polynomen. Vi tittar på ett exempel.

Exempel. Förkorta

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 5x^2 - 6x}$$

så långt det går. Först observerar vi att man kan bryta ut faktorn x ur både täljare och nämnare som vi förkortar bort. Kvar blir då

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$$

Täljaren kan vi faktorisera med hjälp av konjugatregeln till $(x-1)(x+1)$. För att kolla om någon av dessa två är faktorer i nämnaren så kollar vi om 1 eller -1 är ett nollställe till x^2+5x-6. Vi finner att 1 är ett nollställe och faktoriserar (med kort division som ovan) $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$. Därmed kan vi förkorta bort $x-1$ och får till slut

$$\frac{x+1}{x+6},$$

vilket inte kan förkortas mer.

Observera att det urspungliga och det förkortade uttrycket är lika för alla x utom $x=0$ och $x=1$. För dessa två värden är ju inte det ursprungliga uttrycket definierat. □

Vi såg i ett exempel ovan att om man visste ett nollställe till ett andragradspolynom så kunde man med hjälp av faktorisering få det andra nollstället. För andragradspolynom har vi ju redan en allmän metod för att hitta nollställen, men för polynom av högre grad kan man ha stor nytta av denna observation. Antag att vi har ett tredjegradspolynom $p(x)$ som vi vill hitta alla nollställen till och att vi känner till att a är ett nollställe. Då är $p(x)=(x-a)\cdot q(x)$ där $q(x)$ är ett andragradspolynom. Ett nollställe till $p(x)$ är nu ett nollställe till antingen $x-a$ eller till $q(x)$. Alltså för att hitta övriga nollställen till $p(x)$ så hittar vi nollställena till andragradspolynomet $q(x)$ vilket vi vet hur man gör.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^3-9x+10=0$. Vi såg i ett tidigare exempel att $x^3-9x+10=(x-2)(x^2+2x-5)$, så att $x_1=2$ är en lösning och eventuellt andra lösningar är nollställen till x^2+2x-5. Dessa hittar vi med formeln för lösningar till andragradsekvationer:

$$x_{2,3}=-\frac{2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2-(-5)}=-1\pm\sqrt{6}$$

Rötterna är alltså $x_1=2$, $x_2=-1+\sqrt{6}$ och $x_3=-1-\sqrt{6}$. □

Följande resultat kan man ha nytta av om man ska försöka hitta ett nollställe till ett polynom av grad 3 eller högre med heltalskoefficienter.

> Antag att vi har ett polynom x^3+cx^2+bx+a där alla koefficienter är heltal. Om x_1 är ett heltal som är ett nollställe till polynomet så gäller att konstanttermen a är en multipel av x_1.

Med andra ord så är varje heltalsnollställe en delare till konstanttermen a. Samma sak gäller för polynom $x^n+\ldots+bx+a$ av vilken grad n som helst.

Exempel. Vi tittar på polynomet $x^4+x^3-7x^2-x+6$. Det har endast heltalskoefficienter så om det har något heltal som nollställe så måste det vara en delare till 6. Möjliga nollställen blir alltså $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Om man testar dessa tal så finner man att 4 av dem är nollställen nämligen $\{1, -1, 2, -3\}$. Vi kan alltså faktorisera polynomet som

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3). \qquad \square$$

Om ett polynom $p(x)$ har samma faktor $(x-a)$ två gånger så säger man att a är en *dubbelrot* till ekvationen $p(x) = 0$ (om den förekommer tre gånger så kallas den trippelrot o s v).

Exempel. Lös ekvationen $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$.

Lösning: Först löses ekvationen $x^2 - 2x - 7 = 0$, som har rötterna $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Polynomet kan faktoriseras som

$$(x^2 - 2x - 7)^2 = (x - (1 + 2\sqrt{2}))^2 (x - (1 - 2\sqrt{2}))^2,$$

så $1 + 2\sqrt{2}$ och $1 + 2\sqrt{2}$ är dubbelrötter. $\square$

2.5.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 2c

2.5.1 Förenkla följande kvoter mellan polynom så långt det går.

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4}$ b) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^4 - 7x^2 + 6x}$

2.5.2 Lös följande ekvationer. Tips: De har minst en rot som är ett heltal.

a) $x^3 + 3x^2 + x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $2x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = 0$ d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3 = 0$

2.5.3 Lös följande ekvationer. Ange om någon av rötterna är dubbelrot eller trippelrot.

a) $(x-1)^3 = 0$ b) $x^3 - 1 = 0$ c) $(x^2 - 1)^3 = 0$

2.5.4 Faktoruppdela följande polynom.

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b) $x^3 + 7x^2 + 11x + 2$ c) $6 + 3x^2 - 5x - x^3$

3 Geometri

Detta kapitel handlar om analytisk geometri, speciellt räta linjens och cirkelns ekvationer, samt trigonometri.

Grunden till den analytiska geometri som behandlas här är euklidisk geometri, vi inleder därför med att påminna om vissa begrepp och formulera några viktiga satser inom den euklidiska geometrin.

3.1 Euklidisk geometri

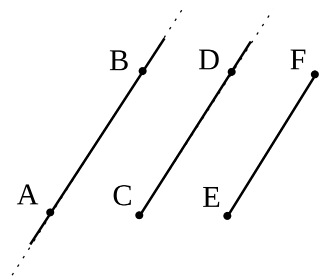
Att diskutera geometri på ett sätt som är logiskt oantastligt är inte helt enkelt och kräver en axiomatisk grund som vi inte ska beröra. Vi nöjer oss med en intuitiv uppfattning och utgår från att alla har en gemensam inre bild av ett plan som har sin utbredning i två dimensioner och saknar begränsningar, räta linjer i detta plan vilka har sin utbredning i en dimension och är obegränsade samt punkter som fyller planet men inte har någon utbredning alls.

Det är praktiskt att ha vissa konventioner/överenskommelser om hur olika begrepp betecknas.

I detta kapitel betecknas punkter med stora bokstäver A, B, C o s v.

Med

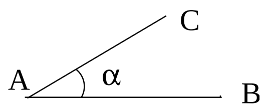
- *linjen AB* menas linjen genom punkterna A och B.
- *strålen AB* menas den del av linjen AB som börjar i A, genomlöper B och fortsätter obegränsat åt det hållet.
- *sträckan AB* menas den del av linjen som ligger mellan A och B.



Figur 1: Linjen AB, strålen CD och sträckan EF.

Om inget annat sägs så avses med AB sträckan AB. Längden av sträckan AB betecknas $|AB|$. Om vi behöver enklare beteckningar för längder så betecknas dessa med små bokstäver, a, b, c o s v.

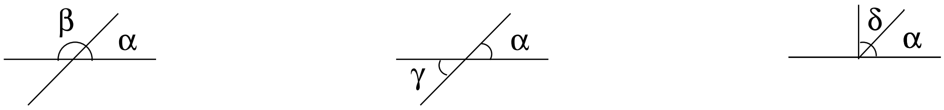
Två strålar eller sträckor AB och AC bildar en vinkel med spets vid A. Denna betecknas $\angle A$ eller $\angle BAC$. Strålarna kallas *vinkelns ben*. Egentligen ger de två strålarna upphov till två vinklar, oftast en som är mindre än ett halvt varv och en som är större. Om inget särskilt påpekas så avses den mindre av de två.



Figur 2: Vinkeln $\angle A$ eller $\angle BAC$.

Storleken, mätetalet, för $\angle A$ betecknas oftast också med $\angle A$ eller, om detta är opraktiskt, med små bokstäver, u, v, α, β, o s v. Vi återkommer till vinkelmätning senare.

Då två linjer skär varandra i en punkt bildas fyra vinklar. Två vinklar som då har ett vinkelben gemensamt kallas *supplementvinklar* eller *sidovinklar*, och två som inte har ett gemensamt ben kallas *vertikalvinklar*. Vi får supplementvinklar också om vi låter en stråle utgå från en punkt på en linje. Om en vinkel är lika stor som sin supplementvinkel så säger vi att vinkeln är *rät*. En rät vinkel är en fjärdedels varv. Beroende på hur man anger vinklars storlek är den räta vinkeln $\frac{\pi}{2}$ radianer eller 90° (90 grader). En vinkel som tillsammans med en given vinkel bildar en rät vinkel kallas *komplementvinkel* till den givna. En vinkel som är mindre än en rät är *spetsig*. En vinkel som är mindre än ett halvt varv men större än en rät är *trubbig*.



(a) Supplementvinklar (b) Vertikalvinklar (c) Komplementvinklar

Figur 3: Olika typer av par av vinklar. Vinkeln α är spetsig, medan β är trubbig.

En av de första geometrisatser man får lära sig i skolan är följande sats.

Sats: *Vinkelsumman i en triangel är alltid* $180°$.

3.1.1 Kongruens och likformighet

För alla resonemang om geometri är kongruens- och likformighetsbegreppen viktiga.

Två figurer i planet är *kongruenta* om man genom att flytta, vrida och eventuellt vända (spegla) den ena figuren kan få den att sammanfalla med den andra.

Två vinklar, $\angle BAC$ och $\angle B'A'C'$, är lika stora, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, om de är kongruenta. T.ex. är vertikalvinklar lika stora. Två sträckor AB och $A'B'$ är lika långa precis när de är kongruenta.

En triangel med hörn A, B och C betecknar vi med $\triangle ABC$. Två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är kongruenta precis när

$$|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |AC| = |A'C'|$$

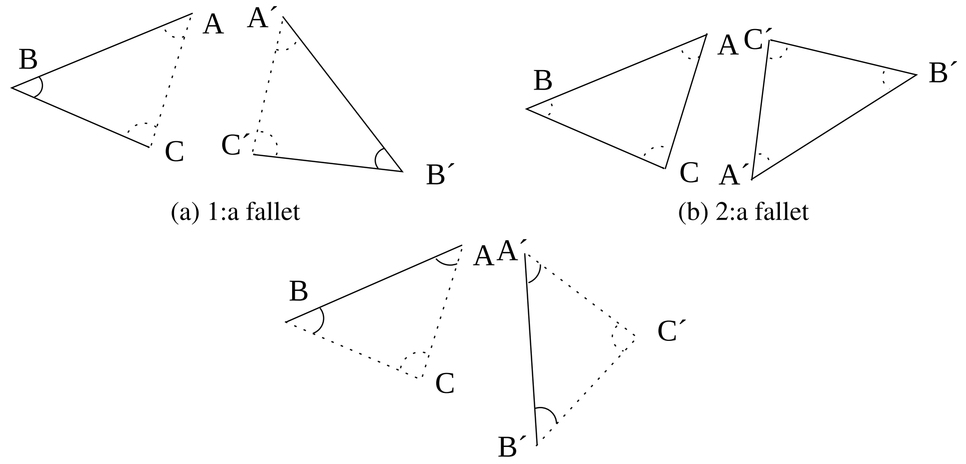
och

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$$

Notera att ordningen på hörnen är väsentlig när man använder detta beteckningssätt för trianglar i kombination med begreppet kongruens. Det är väl ingen överraskning att om vissa av de sex villkoren ovan gäller, så kommer de andra också att göra det. Närmare bestämt gäller de tre så kallade kongruensfallen:

Kongruensfallen

1. **Sida – vinkel – sida:** *Om* $|AB| = |A'B'|$, $\angle B = \angle B'$ *och* $|BC| = |B'C'|$ *så är trianglarna* $\triangle ABC$ *och* $\triangle A'B'C'$ *kongruenta.*
2. **Sida – sida – sida:** *Om* $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ *och* $|AC| = |A'C'|$ *så är trianglarna* $\triangle ABC$ *och* $\triangle A'B'C'$ *kongruenta.*
3. **Vinkel – sida – vinkel:** *Om* $\angle A = \angle A'$, $|AB| = |A'B'|$ *och* $\angle B = \angle B'$ *så trianglarna* $\triangle ABC$ *och* $\triangle A'B'C'$ *kongruenta.*

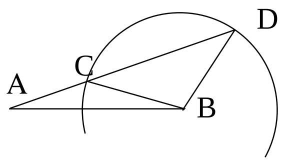


(a) 1:a fallet

(b) 2:a fallet

(c) 3:e fallet

Figur 4: De olika kongruensfallen.



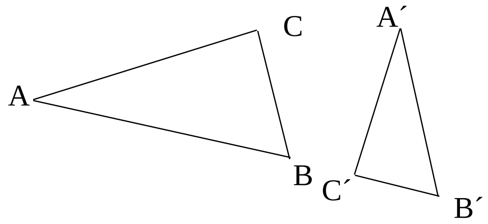
Figur 5: Ett “falskt” fall.

Det finns faktiskt ett fjärde kongruensfall, men man får se upp med formuleringen av det. Fallet Vinkel – Sida – Sida ger inte alltid kongruenta trianglar. För att se detta kan man dra en sträcka AB och slå en cirkel med medelpunkt i B och radie mindre än $|AB|$. Drag sedan en linje genom A som skär cirkeln i två nya punkter, först i C sedan i D. För trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ABD$ gäller då att $\angle A = \angle A$, $|AB| = |AB|$ och $|BC| = |BD|$ (= cirkelns radie), men trianglarna är uppenbarligen inte kongruenta. Men om man kräver att den vinkel som är lika i de två trianglarna ska stå mot den längsta sidan gäller kongruens:

4. Om $\angle A = \angle A'$, $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|$ och sidorna AC och $A'C'$ är längst i trianglarna $\triangle ABC$ respektive $\triangle A'B'C'$, så är de båda trianglarna kongruenta.

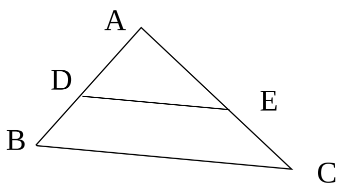
Löst talat betyder begreppet kongruens mellan trianglar att de har samma form och samma storlek. Två trianglar som har samma form men inte nödvändigtvis samma storlek sägs vara likformiga. Mer precist är två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ *likformiga* om

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C' \text{ och } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$



Figur 6: Exempel på två likformiga (men inte kongruenta) trianglar.

Den viktigaste satsen om likformiga trianglar är *topptriangelsatsen*. I figur 7 är DE parallell med BC. Triangeln $\triangle ADE$ är då en *topptriangel* i den större triangeln $\triangle ABC$. *Topptriangelsatsen* säger då att de två trianglarna $\triangle ADE$ och $\triangle ABC$ är likformiga.

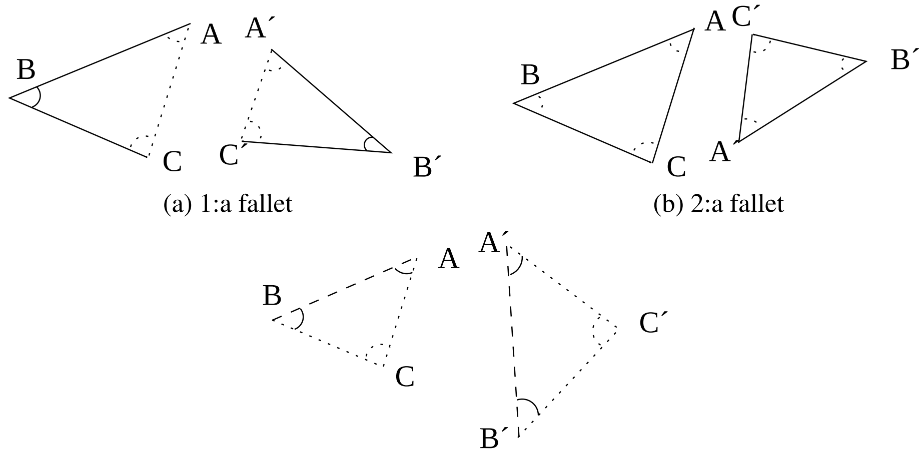


Figur 7: Triangeln $\triangle ADE$ är en *topptriangel* i den större triangeln $\triangle ABC$

De olika kongruensfallen har sina motsvarande likformighetsfall som bevisas genom att man visar att den mindre av de två trianglarna är kongruent med en topptriangel i den större.

Likformighetsfallen

1. **Sida – vinkel – sida:** *Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\angle A = \angle A'$ och $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'}$ så är trianglarna likformiga.*
2. **Sida – sida – sida:** *Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ så är trianglarna likformiga..*
3. **Vinkel – (sida) – vinkel:** *Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\angle A = \angle A'$ och $\angle B = \angle B'$ så är trianglarna likformiga.*



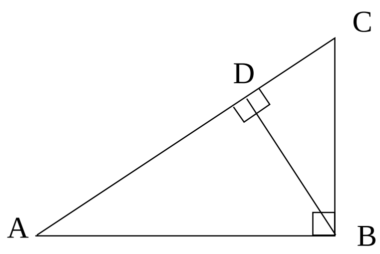
(a) 1:a fallet

(b) 2:a fallet

(c) 3:e fallet

Figur 8: De olika likformighetsfallen.

Exempel. I figur 9 är $\angle ABC$ och $\angle ADB$ räta vinklar. Eftersom $\angle A$ är gemensam för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ADB$ är dessa två trianglar likformiga enligt tredje likformighetsfallet. På samma sätt visas att trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle BDC$ är likformiga. $\square$



Figur 9: Tre rätvinkliga trianglar.

3.1.2 Längd, area och vinkelmätning

Att ge mätetal åt sträckors längd och figurers area är inte så okomplicerat som man kan tro.

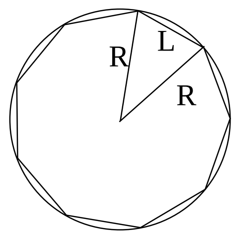
När det gäller sträckors längd är idén att man utgår från en fastställd enhetssträcka och ger den mätetalet 1. Tanken är sedan att man ger en annan given sträckas längd ett mätetal genom att se hur många gånger den fastlagda enhetssträckan går i denna. Problemet är förstås att detta i allmänhet inte går jämnt ut. För att lösa det kan man dela in enhetssträckan i ett visst antal lika stora delar och se hur många av dessa som ytterligare krävs för att mäta den givna sträckan. Samma svårighet dyker emellertid upp igen: inte heller detta går i allmänhet jämnt ut, oavsett hur man indelar enhetssträckan i lika stora delar. Detta insåg enligt en legend Hippasos, en av Pythagoras lärjungar, för i runda svängar 2500 år sedan.

Vi ska naturligtvis inte göra en stor affär av detta utan utgår från att man med hjälp av de *reella talen* kan mäta sträckors längd, på ett sådant sätt att två sträckors längd har samma mätetal precis när de är kongruenta. Det reella tal som mäter längden av sträckan AB betecknas $|AB|$. Detta tal kallas också *avståndet* mellan punkterna A och B.

För att mäta andra kurvor än sträckor måste vi approximera kurvan med ett antal korta sträckor mellan punkter på kurvan. Ju fler punkter dess bättre approximation. Kurvans längd är gränsvärdet för dessa approximationer.

En cirkel består av alla punkter som har samma avstånd till en viss given punkt. Avstådet i fråga kallas cirkelns radie och den givna punkten kallas cirkelns medelpunkt.

Då det gäller att beräkna cirkelns längd är det enklast att utgå från regelbundna n-hörningar med hörn på cirkeln. Så gjorde redan Arkimedes. Man delar in n-hörningen i trianglar med spets i cirkelns medelpunkt och beräknar basens längd. Om man börjar med en regelbunden 6-hörning, som har basen R och sedan fördubblar antalet hörn gång på gång, så kan man beräkna basens längd med Pythagoras sats (se 3.1.3 nedan). Detaljerna i detta lämnas till läsaren.

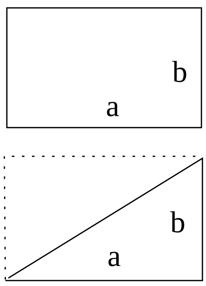


Figur 10: Cirkelskiva delad i lika stora sektorer.

Av detta sätt att mäta cirkelns omkrets följer det att förhållandet mellan denna och cirkelns radie, eller för den delen cirkelns diameter, är samma för alla cirklar. Kvoten mellan en cirkels omkrets är alltså en och samma konstant som betecknas med den grekiska bokstaven π. Det betyder att en cirkel med radien R har omkretsen $2\pi R$.

Om cirkelns radie är 1 så har 6-hörningen omkretsen 6. Eftersom cirkelns omkretsen är 2π så får man närmevärdet 3 till π. Inte så bra, men det behövs inte så många fördubblingar av antalet hörn för att man skall få riktigt bra värde på π. För att få de miljontals decimaler som nu är bestämda krävs emellertid helt annan teknik.

Också areabegreppet är som sagt komplicerat, men vi ska inte heller göra nån stor sak av det.



Figur 11: Rektangel har area ab, triangel $ab/2$.

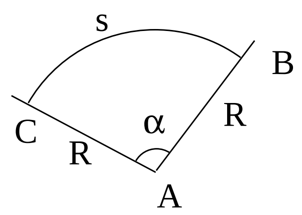
Arean av en rektangel med bas av längd a och höjd av längd b har arean ab.

Drar man en diagonal i en rektangel får man två rätvinkliga trianglar med bas a och höjd b. Arena av en sådan triangel måste därför vara $ab/2$. Härifrån är inte svårt att övertyga sig om att arean av en triangel, vilken som helst, har en area som är hälften av produkten av basen och höjden.

En intressant observation man kan göra i figur 10 ovan är att trianglarna också delar in cirkelskivan i delar vars area vi kan beräkna. Om basen i varje triangel är L och höjden h så är arean $L \cdot h/2$. Höjden är, för stort n, i det närmaste samma som cirkelns radie. Då vi summerar alla triangelareorna får vi ungefär cirkelns omkrets multiplicerad med $R/2$. Eftersom omkretsen är $2 \cdot R \cdot \pi$ får vi arean till $\pi \cdot R^2$. En cirkelskiva med radie R har alltså arean πR^2.

Det är alltså *samma* förhållande mellan cirkelns omkrets och diameter som det mellan cirkelskivans area och arean av en kvadrat med radien som sida. Detta upptäckte också Arkimedes.

Vi definierar mätetalet för en vinkel $\angle A$ som $\frac{s}{R}$, där s är längden av en cirkelbåge BC med medelpunkt i A och radien R som i figur 12. Eftersom alla cirklar är likformiga är denna kvot oberoende av cirkelns radie.



Figur 12: Cirkelbågen BC.

Man kan alternativt välja att definiera vinkelns mått som längden av cirkelbågen BC då radien $R = 1$.

Om man vänder på det hela kan man säga att en *cirkelbåge* på en cirkel med radie R har längden αR, där α är måttet, i radianer, på vinkeln vid medelpunkten som bågen ger.

Mäter man istället denna vinkel i grader, låt oss säga den då har måttet a°, så blir cirkelbågens längd

$$\frac{a^\circ}{360} \cdot 2\pi R = \frac{a^\circ}{180}\pi R.$$

I huvudsak använder man radianer som enhet vid vinkelmätning i matematiken. Just inom geometri är det dock vanligare med grader. I förra avsnittet påminde vi om att vinkelsumman i en triangel är π (radianer) eller 180° och att en rät vinkel är $\frac{\pi}{2}$ eller 90°. De spetsiga vinklarna i en likbent rätvinklig triangel är $\frac{\pi}{4}$ eller 45°. En liksidig triangel har vinklarna $\frac{\pi}{3}$ eller 60°. Sambandet mellan de två sätten att ange en vinkels storlek ges av

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017 \text{ radianer och } 1 \text{ radian } = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ}$$

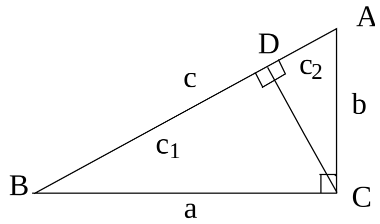
3.1.3 Pythagoras sats

Geometrins förmodligen mest kända sats är Pythagoras sats. Den beskriver ett samband mellan den längsta sidan, hypotenusan, i en rätvinklig triangel och det två kortare, kateterna. Få resultat om något inom matematiken har en längre historia. Det är dokumenterat att satsen var känd redan av babylonierna för 3500 år sedan även om den fått sitt namn efter en grekisk matematiker, Pythagoras, som verkade för ca 2500 år sedan.

Sats: Om längderna av kateterna i en rätvinklig triangel är a respektive b och hypotenusans längd är c, så är $a^2 + b^2 = c^2$.

Det finns ett otal mer eller mindre olika bevis för denna sats. En del bygger på areabegreppet och går till så att man på olika sätt pusslar i hop figurer. Vi ska emellertid återge ett som bygger på likformighet.

Bevis.
Låt den rätvinkliga triangeln vara $\triangle ABC$ med $\angle C$ rät. Drag, som i figur 13, höjden DC. Vi har då fått två mindre trianglar $\triangle CBD$ och $\triangle ACD$ som båda är likformiga med den ursprungliga triangeln $\triangle ABC$, eftersom de har två vinklar gemensamma med den ($\angle B$ och en rät, respektive $\angle A$ och en rät).



Figur 13: Tre likformiga rätvinkliga trianglar.

Sätter vi $c_1 = |BD|$ och $c_2 = |AD|$ har vi att $c_1 + c_2 = c$ och av likformigheten mellan $\triangle CBD$ och $\triangle ABC$ samt $\triangle ACD$ och $\triangle ABC$ följer att

$$\frac{a}{c_1} = \frac{c}{a} \quad \text{respektive} \quad \frac{b}{c_2} = \frac{c}{b}$$

och vi får då

$$a^2 = c \cdot c_1 \quad \text{respektive} \quad b^2 = c \cdot c_2.$$

Addition ger nu

$$a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2) = c^2.$$

□

3.1.4 Övningar

3.1.1 Hur många grader och radianer är

a) 1/2 varv b) 1/8 varv c) 1/3 varv

d) 1/6 varv e) 3/4 varv f) 7/6 varv

3.1.2 Omvandla till radianer:

a) $90°$ b) $30°$ c) $45°$ d) $270°$

e) $18°$ f) $150°$ g) $110°$

3.1.3 Omvandla till grader:

a) 3π b) $\pi/2$ c) $3\pi/4$ d) $5\pi/12$

3.1.4 Beräkna längden av cirkelbågen i en cirkelsektor med

a) centrumvinkeln $v = 60°$ och radien $R = 2$ (längdenheter)

b) $v = 150°$ och $R = 5$ c) $v = 300°$ och $R = 4/3$.

3.1.5 Bestäm vinklen mellan två (närliggande) sidor i en regelbunden

a) 6-hörning b) 5-hörning c) n-hörning.

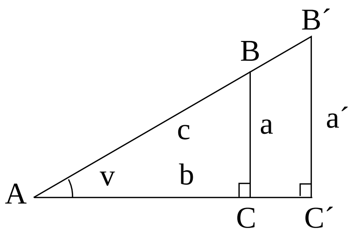
Ledning: Vinkelsumman i en triangel är $180° = \pi$ (radianer).

3.2 Trigonometri i rätvinkliga trianglar

I detta avsnitt definierar vi de trigonometrska funktionerna för spetsiga vinklar med hjälp av rätvinkliga trianglar.

3.2.1 Trigonometriska funktioner för vinklar $< 90°$

Betrakta nu två rätvinkliga trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle AB'C'$med $\angle A = v$, $\angle C = \angle C' = \pi/2$ och $\angle B = \angle B' = \pi/2 - v$. Hypotenusornas längder är $|AB| = c$ och $|A'B'| = c'$. Kateternas längder är $|BC| = a$ och $|B'C'| = a'$ samt $|AC| = b$ och $|A'C'| = b'$.



Figur 14: Två likformiga rätvinkliga trianglar.

Eftersom de två trianglarna är likformiga gäller det att

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Men då följer det att

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \text{ och } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Dessa tre kvoter beror alltså endast av vinkeln v och vi kan definiera *sinus*, *cosinus*, *tangens* och *cotangens* för en spetsig vinkel v som

$$\begin{aligned}
\sin v &= \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusa}},\\
\cos v &= \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}},\\
\tan v &= \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}},\\
\cot v &= \frac{b}{a} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}.
\end{aligned}$$

Av definitionerna följer det direkt att

$$\tan v = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin v}{\cos v} \quad \text{och} \quad \cot v = \frac{1}{\tan v}.$$

Vi får också genom att multiplicera med nämnarna i definitionerna att

$$\boxed{a = c \cdot \sin v, \quad b = c \cdot \cos v, \quad a = b \cdot \tan v \;\text{ och }\; b = a \cdot \cot v.}$$

Det följer också av definitionerna att $\sin v$ och $\tan v$ ökar om v ökar, medan $\cos v$ och $\cot v$ minskar (så länge vinkeln v är spetsig).

Eftersom det för den andra spetsiga vinkeln $\angle B$, som är komplementvinkeln till $\angle A$, gäller att $\angle B = \dfrac{\pi}{2} - v$ så får vi att

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \sin v, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v,\\
\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \cot v, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \tan v.
\end{aligned}}$$

Man kommer ihåg detta som att *cosinus för en vinkel är sinus för komplementvinkeln* och vice versa, samt *tangens för en vinkel är cotangens för komplementvinkeln* och vice versa.

Pythagoras sats ger oss följande användbara samband mellan sinus och cosinus av en vinkel.

Sats: (*Trigonometriska ettan*) För alla vinklar v i intervallet $0 < v < \frac{\pi}{2}$ gäller att

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1.$$

Bevis. Med beteckningar som i definitionerna är $\sin v = \dfrac{a}{c}$ och $\cos v = \dfrac{b}{c}$. Då är

$$\sin^2 v + \cos^2 v = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \{\text{Pythagoras sats}\} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

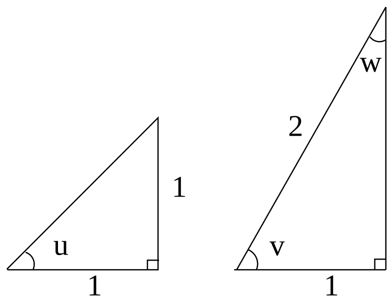
vilket är precis det vi skulle bevisa. $\square$

Anmärkning: Vi kommer att definiera $\sin v$ och $\cos v$ för vinklar som inte är spetsiga längre fram i kapitlet. Trigonometriska ettan och formlerna för komplementvinklar (vinklar vars summa är $\pi/2$) gäller även dessa vinklar.

Vi härleder nu värdena för $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ då v är är en spetsig vinkel i en likbent, rätvinklig triangel eller i en halv liksidig triangel d v s då v är $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$ eller $\dfrac{\pi}{3}$.

Vi får i figur 15 att $u = \dfrac{\pi}{4}$, $v = \dfrac{\pi}{3}$ och $w = \dfrac{\pi}{6}$.
Pythagoras sats ger oss att $c = \sqrt{2}$ och $b = \sqrt{3}$.
Definitionerna ger oss då följande värden:

v	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin v$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos v$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan v$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



Figur 15: En likbent rätvinklig triangel samt en halv liksidig triangel.

3.2.2 Övningar

3.2.1 Bestäm exakta värdet av

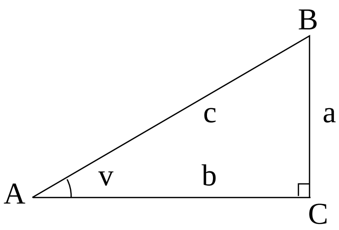
a) $2\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\cot\dfrac{\pi}{3}$

b) $\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}$

c) $(\sin 60^\circ + \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)$

d) $(\tan 60^\circ - \tan 45^\circ)/(1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ)$.

3.2.2 Solvera (bestäm alla sidor och vinklar i) följande rätvinkliga trianglar med beteckningar enligt figuren bredvid:



a) $c = 4,0$ och $A = 35°$

b) $a = 3,0$ och $A = \dfrac{\pi}{5}$

c) $a = 2,0$ och $c = 3,0$

d) $a = 2,0$ och $b = 3,0$

e) $b = 5,0$ och $B = 55°$.

3.2.3 Bestäm för v i intervallet $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$)

a) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 3/5$, [Ledning: Rita en triangel med $a = 3$ och $c = 5$]

b) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 2/3$

c) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 1/3$

d) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 0,4$

e) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 1/2$

f) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 24/7$

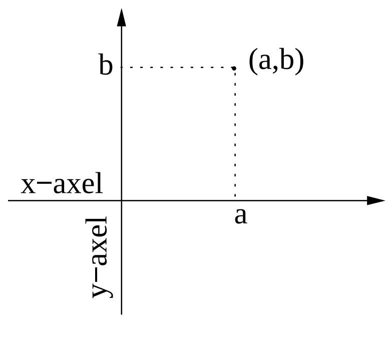
g) $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0,7$

3.3 Analytisk geometri

Analytisk geometri handlar om att ange punkter med hjälp av koordinater och sedan, med hjälp av dessa, beskriva geometriska objekt genom ekvationer. Här skall vi enbart studera räta linjens ekvation och cirkelns ekvation samt grunderna till trigonometrin. Grunden till det hela är *koordinatsystem*.

3.3.1 Koordinatsystem

Ett rätvinkligt koordinatsystem består av två linjer som skär varandra under rät vinkel i en punkt. Oftast ritar man ena linjen horisontellt, den kallas *x-axeln*, och den andra linjen *y-axeln* ritas vertikalt. Deras skärningspunkt kallas *origo*. Givetvis kan koordinatsystem vridas om man så önskar, men i detta kapitel håller vi oss till horisontell x-axel.



Figur 16: Rätvinkligt koordinatsystem.

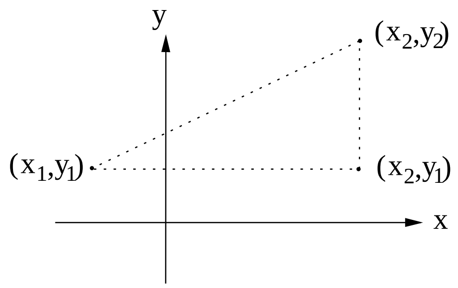
De två koordinataxlarna är *tallinjer*. Origo motsvarar talet 0 på både x- och y-axeln, punkterna till höger på x-axeln och uppåt på y-axeln motsvarar positiva tal, de till vänster och nedåt motsvarar negativa tal. Om punkten P ligger på en av axlarna och motsvarar talet a så är $|a| =$ avståndet mellan origo och punkten P.

Varje punkt i planet kan nu tilldelas *koordinater* (a,b) på följande sätt. Vi drar först genom punkten en linje parallell med y-axeln. Denna linje skär x-axeln i en punkt som motsvarat ett tal a. Drag också en linje parallell med x-axeln. Denna skär y-axeln i en punkt som motsvarar ett tal b.

Punkter i planet och ordnade par av reella tal svarar på så vis precis mot varandra. Vi säger därför att planet är

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \text{ och } y \in \mathbb{R}\}.$$

De två koordinataxlarna delar in planet i fyra delar, *kvadranter*. Dessa numreras moturs med början i första kvadranten där både x- och y-koordinaten är positiva. I andra kvadranten är $x < 0$ och $y > 0$. I tredje är båda negativa och i fjärde är $x > 0$ och $y < 0$.



Figur 17: Avståndet d mellan punkterna

Betrakta nu två punkter i planet (x_1,y_1) och (x_2,y_2). Dessa är hörn i en rätvinklig triangel med (x_1,y_2) som det tredje hörnet. De två kateternas längder är då $|x_1 - x_2|$ och $|y_1 - y_2|$. Pythagoras sats ger oss nu att hypotenusans längd är

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}.$$

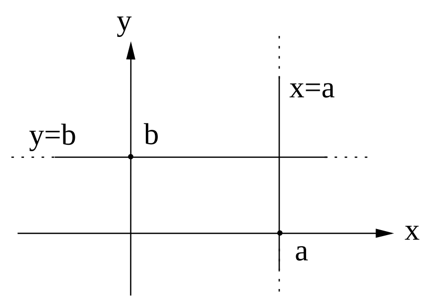
Eftersom avståndet från en punkt till en annan är längden av sträckan mellan punkterna kan avståndet, d, mellan (x_1,y_1) och (x_2,y_2) beräknas med *avståndsformeln:*

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

3.3.2 Räta linjer

Betrakta först en linje parallell med x-axeln i ett koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$. Eftersom alla punkter på denna linje har samma y-koordinat och alla punkter med denna y-koordinat ligger på linjen, kan vi beskriva linjen som

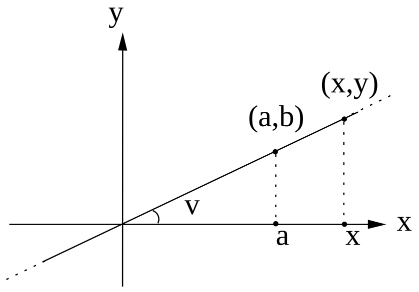
$$\{(x,y) : y = b\},$$



Figur 18: Axelparallella linjer.

dvs som mängden av punkter i planet vars andra koordinat är b. Vi säger att ekvationen $y = b$ är ekvationen för en rät linje parallell med y-axeln. På samma sätt är $x = a$ ekvationen för en rät linje parallell med x-axeln.

Vi skall nu bestämma ekvationer för linjer som inte är parallella med någon av koordinataxlarna och börjar med en linje L som går genom origo och någon punkt (a,b) i första kvadranten.



Figur 19: Sned linje.

Låt (x,y) vara en godtycklig punkt på L med $x > 0$ (och $y > 0$). Vi har då två rätvinkliga trianglar med ett hörn i origo och ett på L. Dessa två trianglar är likformiga eftersom de har lika vinklar. Då följer det att $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$ vilket ger

$$y = kx \text{ där } k = \frac{b}{a}.$$

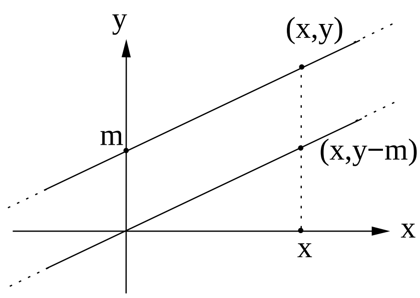
Konstanten k kallas *riktningskoefficient* för linjen.

Det är också viktigt att lägga märke till att

$$k = \tan v,$$

där v är vinkeln mellan linjen och positiva x-axeln. Än så länge har vi bara diskuterat tangens av vinklar mellan 0 och $\pi/2$, men när vi sedan kommer till godtyckliga vinklar blir det uppenbart att det gäller generellt.

Om punkten (x,y) ligger på linjen men $x < 0$ och $y < 0$, så gäller som ovan att $\frac{b}{a} = \frac{-y}{-x}$ vilket också ger $y = kx$. Med ett liknande resonemang ser man att linjer genom origo och en punkt i andra och fjärde kvadranten har en ekvation $y = kx$, där $k < 0$.



Figur 20: Linje som inte går genom origo.

Betrakta nu en rät linje som skär y-axeln där $y = m$. Denna är parallell med en linje genom origo och riktningskoefficient k. För punkten $(x, y-m)$ gäller då att $y - m = kx$. Linjen genom $(0,m)$ har alltså ekvationen

$$y = kx + m.$$

ENPUNKTSFORMELN. Vi skall visa den s k *enpunktsformeln*. Denna säger att ekvationen för en rät linje, som är parallell med linjen $y = kx$ och går genom en *given punkt* (x_0, y_0) är

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Bevis. Ekvationen $y - y_0 = k(x - x_0)$ kan skrivas om till $y = kx + m$ där $m = y_0 - kx_0$. Alltså är det ekvationen för en rät linje parallell med linjen $y = kx$. Dessutom gäller det att insättning av $x = x_0$ och $y = y_0$ ger 0 i både vänster och höger led av ekvationen. Därför är $y - y_0 = k(x - x_0)$ också ekvationen för en linje genom (x_0, y_0). □

TVÅPUNKTSFORMELN. En rät linje, som går genom *två givna punkter* (x_1, y_1) och (x_2, y_2) med $x_1 \neq x_2$, har ekvationen

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

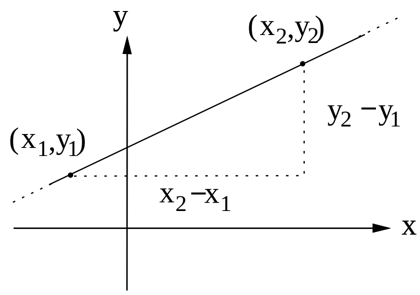
Detta är den s k *tvåpunktsformeln* för räta linjen.

Bevis.

Eftersom linjen går genom (x_1, y_1) och (x_2, y_2), där $x_1 \neq x_2$, så kan *riktningskoefficienten* beräknas:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Tillämpa nu enpunktsformeln med $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ så erhålls den sökta ekvationen. □



Figur 21: Linje med två punkter.

Vi har härlett tre typer av ekvationer för räta linjer. Lodräta linjer har ekvationen $x = a$, vågräta linjer har ekvationen $y = b$ och övriga linjer $y = kx + m$ med $k \neq 0$. Alla dessa kan skrivas på formen

$$Ax + By + C = 0,$$

där minst en av A eller B är $\neq 0$. Detta är den *allmänna formen* för räta linjens ekvation. Om $A = 0$, men $B \neq 0$ så fås en vågrät linje $y = -C/B$, om $B = 0, A \neq 0$ får en lodrät linje $x = -C/A$ och om $A \neq 0$ och $B \neq 0$ en rät linje

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

som skär båda axlarna.

Till skillnad från de andra skrivsätten är inte ekvationen $Ax + By + C = 0$ entydigt bestämd av linjen, dvs en och samma linje kan beskrivas av flera ekvationer. Både $x + 2y + 3 = 0$ och $2x + 4y + 6 = 0$ är ekvationer för samma linje. Du ser detta genom att skriva om ekvationerna på formen $y = kx + m$. Man talar därför hellre om *en ekvation* (obestämd form) för den räta linjen i stället för *ekvationen* (bestämd form) för linjen.

Två linjer $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ och $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ är *parallella* om och endast om riktningskoefficienterna är lika d v s om $k_1 = -A_1/B_1$ och $k_2 = -A_2/B_2$ är lika eller om $B_1 = B_2 = 0$.

Exempel. Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna $(2,4)$ och $(-1,3)$.

Lösning. Riktningskoefficienten blir som i härledningen av tvåpunktsformeln

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{-1-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Med enpunktsformeln får vi att linjens ekvation blir

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x-2) \iff y = \frac{x}{3} + \frac{10}{3} \iff x - 3y + 10 = 0.$$

Alternativt kan man förstås ta den andra punkten $y - 3 = \frac{1}{3}(x+1)$.

Svar: $x - 3y + 10 = 0$.

Observera att det är en god vana att kontrollera räkningarna genom att visa att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen. I detta fallet kontrollerar vi och får

$$2 - 3 \cdot 4 + 10 = 0 \ \text{ respektive } \ -1 - 3 \cdot 3 + 10 = 0,$$

som båda stämmer. □

Exempel. Sök skärningspunkten mellan linjerna $3x + 4y - 6 = 0$ och $2x + y - 5 = 0$.

Lösning. Rita först en figur som åtminstone ger en approximation till skärningspunkten. En punkt ligger på en linje om punktens koordinater satisfierar linjens ekvation. Punkten ligger på båda linjerna om punktens koordinater satisfierar båda ekvationerna, alltså om koordinaterna är en lösning till ekvationssystemet med de två linjernas ekvationer.

Vi har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x + y \ = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 8x + 4y = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 5x \qquad = 14 \end{cases},$$

som ger

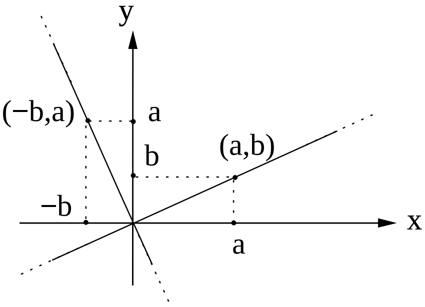
$$x = \frac{14}{5} \text{ och } y = \frac{6-3x}{4} = \frac{6 - 3 \cdot \frac{14}{5}}{4} = \frac{\frac{30-42}{5}}{4} = \frac{-3}{5}.$$

Alternativt kan man lösa ut y ur den andra ekvationen vilket ger $y = 5 - 2x$, som insatt i den första ekvationen ger $3x + 4(5 - 2x) = 6$ o s v.

Svar: Skärningspunkten är $(14/5, -3/5)$. □

En rät linje, som skär en annan given rät linje vinkelrätt, kallas *normal* till den givna linjen.

Figuren bredvid illustrerar att om man vrider linjen $y = kx$ en rät vinkel moturs, så kommer punkten (a,b) att hamna på $(-b,a)$. Av detta följer att normalen genom origo till linjen $y = kx$ har riktningskoefficienten $\dfrac{a}{-b}$. Eftersom $k = \dfrac{b}{a}$ har vi att $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-1}{k}$.



Figur 22: Linje med två punkter.

Normalens riktningskoefficient är alltså $\dfrac{-1}{k}$, om den givna linjens riktningskoefficient är k. Om vi översätter detta till en ekvation på den allmänna formeln, så får vi att en rät linje $Ax + By + C_1 = 0$ har normalerna $Bx - Ay + C_2 = 0$. Här är konstanterna C_1 och C_2 godtyckliga eftersom villkoret att vara normal bara beror på linjens riktning.

Exempel. Bestäm en ekvation för linjen, som går genom $(2,-1)$ och är normal till $3x + 2y + 2 = 0$ Observera att punkten $(2,-1)$ ligger utanför den givna linjen.

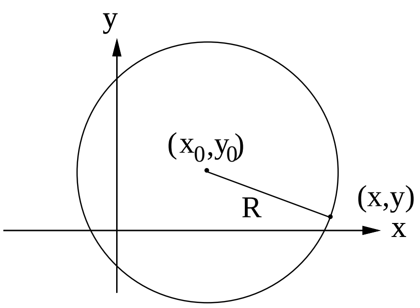
Lösning. Den givna linjen, vars ekvation kan skrivas $y = -3x/2 - 1$, har riktningskoefficienten $k_1 = -3/2$. Normalens riktningskoefficient är därför $k_2 = -1/k_1 = 2/3$ och normalens ekvation

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Longleftrightarrow 2x - 3y - 7 = 0$$

beroende på vilken form man föredrar. □

3.3.3 Cirkelns ekvation

En cirkel består av alla punkter i ett plan som har ett bestämt avstånd, *cirkelns radie*, till en bestämd punkt, *cirkelns medelpunkt* eller *centrum*.



Figur 23: Cirkel med radie R kring x_0, y_0.

Ekvationen för en cirkel med radien R och medelpunkten (x_0, y_0) är

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Detta följer av avståndsformeln: Punkten (x,y) ligger på cirkeln precis när dess avstånd till (x_0,y_0), $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, är R, eller (bättre) när kvadraten på detta avstånd är R^2.

Speciellt är

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ekvationen för en cirkel med radien R och medelpunkten i origo.

Exempel. Ge den geometriska betydelsen av ekvationen

$$x^2+2x+y^2-3y=3.$$

Lösning. Ekvationen kan (genom kvadratkomplettering) skrivas om som

$$x^2+2x+1+y^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot y+\left(\frac{3}{2}\right)^2=3+1+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

som om man skriver som kvadrater blir

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

vilket betyder en cirkel med medelpunkt $(-1,\frac{3}{2})$ och radie $\dfrac{5}{2}$. Rita en figur. $\square$

3.3.4 Cirklar och linjer

En linje som skär cirkeln kan göra det i en eller två punkter. Om det är två skärningspunkter, A och B så bildar sträckan AB en *korda* till cirkeln. Om linjen bara har en punkt, A, gemensam med cirkeln, så säger vi att linjen *tangerar* cirkeln och att A är *tangeringspunkten*. Av symmetriskäl är linjen genom cirkelns medelpunkt och en punkt A på periferin *normal* till cirkelns tangent i A.

Exempel. Vi bestämmer ekvationen för tangenten i punkten $(1,2)$ till cirkeln med medelpunkt $(2,-1)$ och radie $\sqrt{10}$.

Lösning. Cirkelns ekvation är $(x-2)^2+(y+1)^2=10$. Insättning av $(x,y)=(1,2)$ ger

$$VL=(1-2)^2+(2+1)^2=(-1)^2+3^2=1+9=10$$

vilket visar att $(1,2)$ ligger på cirkeln. Normalen till cirkeln genom $(1,2)$ går också genom medelpunkten $(2,-1)$. Riktningskoefficient för normalen är

$$\frac{2-(-1)}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3.$$

Riktningskoefficient för tangenten är då $-\dfrac{1}{-3}=\dfrac{1}{3}$. Tangentens ekvation erhålls med enpunktsformeln: $y-2=\frac{1}{3}(x-1)$. Detta skrivs om till $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ eller $x-3y+5=0$ beroende på vilken form man önskar. $\square$

Exempel. Vi bestämmer skärningspunkterna mellan cirklarna

$$x^2+4x+y^2-2y=8 \text{ och } x^2+9x+y^2-3y=10.$$

Lösning. Skärningspunkter är lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 2y = 8 \\ x^2 + 9x + y^2 - 3y = 10 \end{cases}$$

Subtrahera första ekvationen från den andra. Då erhålls:

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 2y = 8 \\ \quad 5x \quad\quad -y = 2 \end{cases}$$

Lös ut y och sätt in i första ekvationen:

$$\begin{cases} x^2 + 4x + (5x-2)^2 - 2(5x-2) = 8 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad y = 5x - 2 \end{cases}$$

Den första ekvationen förenklas till $26x^2 - 26x = 0$ med lösningarna $x_1 = 0$ som ger $y_1 = -2$ respektive $x_2 = 1$ som ger $y_2 = 3$. Insättning av punkternas koordinater i cirklarnas ekvationer visar att båda punkterna ligger på båda cirklarna. Det är en god vana att göra en sådan kontroll.

Svar: Skärningspunkterna är $(0,-2)$ och $(1,3)$. $\square$

En cirkels ekvation är bestämd om vi känner medelpunkt och radie, alltså om vi känner de *tre* storheterna x_0, y_0 och R. Detta betyder att *tre* av varandra oberoende villkor helt bestämmer en cirkel. T ex gäller det att genom tre givna punkter, som ej ligger i rät linje, går det en och endast en cirkel.

Exempel. Vi bestämmer ekvationen för cirkeln som går genom de tre punkterna $(2,2)$, $(2,-4)$ och $(-2,0)$.

Lösning. Kalla medelpunkten (a,b) och radien R. Cirkelns ekvation är $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ där vi ska bestämma a, b och R. De tre punkterna ger tre ekvationerna

$$\begin{cases} (2-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 \\ (2-a)^2 + (-4-b)^2 = R^2 \\ (-2-a)^2 + (0-b)^2 = R^2. \end{cases}$$

Utveckla kvadraterna och subtrahera första ekvationen från de övriga.

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 = R^2 \\ \quad\quad\quad\quad 12b + 12 = 0 \\ \quad\quad 8a + \quad 4b - 4 = 0. \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger nu $b = -1$ som insatt i tredje ger $a = 1$. Dessa värden ger i första ekvationen $R = \sqrt{10}$.

Svar: Cirkelns ekvation är $(x-1)^2+(y+1)^2=10$.

Som tidigare kontrollerar man att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen. $\square$

3.3.5 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 3a

3.3.1 Bestäm avståndet mellan

a) $(-6,0)$ och origo b) origo och $(2,3)$ c) $(2,2)$ och $(-3,2)$

d) $(2,-2)$ och $(-4,6)$ e) $(-2,5)$ och $(-4,8)$

3.3.2 Bestäm en punkt på y-axeln, som ligger lika långt från punkterna

a) $(-3,2)$ och $(4,1)$ b) $(-2,1)$ och $(4,5)$

3.3.3 Bestäm läget för en liksidig triangels tredje hörn då två av hörnen ligger i

a) $(-1,-1)$ och $(3,1)$ b) $(2,3)$ och $(-1,0)$

3.3.4 Bestäm en ekvation för räta linjen genom

a) origo med riktningskoefficienten $2/3$
b) $(2,1)$ med riktningskoefficienten $-2/3$

c) $(-2,3)$ parallell med x-axeln d) $(-2,3)$ parallell med y-axeln.

3.3.5 Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna:

a) $(1,1)$ och $(2,3)$ b) $(-2,3)$ och origo c) $(-1,0)$ och origo

d) $(-2,1)$ och $(2/3,1/3)$ e) $(4/3,-1/5)$ och $(3/7,2/9)$

f) $(-2/7,-3/23)$ och $(-2/7,8/69)$.

3.3.6 Sök skärningspunkterna mellan linjerna

a) $2x+3y-6=0$ och $x+y-1=0$
b) $2x+3y=0$ och $x-2y+2=0$
c) $2x-3y-6=0$ och $4x-6y=36$
d) $3x+2y-4=0$ och $6x+4y=8$

3.3.7 Visa att om $a \neq 0$ och $b \neq 0$ så har den räta linjen genom punkterna $(a,0)$ och $(0,b)$ ekvationen $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3.3.8 Bestäm en ekvation för linjen genom punkterna:

a) $(2,0)$ och $(0,-4)$ b) $(0,3)$ och $(1,0)$ c) $(0,1)$ och $(0,0)$.

3.3.9 Bestäm en ekvation för normalen till linjen

a) $2x+5y=0$ i origo   b) $3y-x=4$ i punkten $(-1,1)$
c) $5x+9y=0$ från punkten $(2,3)$ d) $x=4y+1$ från origo.

3.3.10 Bestäm en ekvation för cirkeln med följande medelpunkt och radie:

a) origo; $R=9$ b) $(2,-3); R=7$ c) $(-6,0); R=2,5$

3.3.11 Ge en ekvation för en cirkel, som har medelpunkten $(-1,3)$ och går genom

a) origo   b) $(1,1)$ c) $(7,0)$

3.3.12 Ange den geometriska betydelsen av ekvationen

a) $x^2+y^2-3=0$ b) $x^2+y^2-4y=5$
c) $2x^2+2y^2-4x+3y=0$ d) $x^2+y^2+4x-y+4=0$
e) $36x^2+36y^2-36x+48y=39$.

3.3.13 Sök skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2+4x+y^2-2y=8$ och räta linjen

a) $5x-y-2=0$ b) $2x-3y-6=0$ c) $4x-y-6=0$

3.3.14 Ge en ekvation för en cirkel, som går genom

a) $(1,-3),(-3,1)$ och $(-5,-1)$ b) $(6,7),(-3,4)$ och $(-18,-1)$

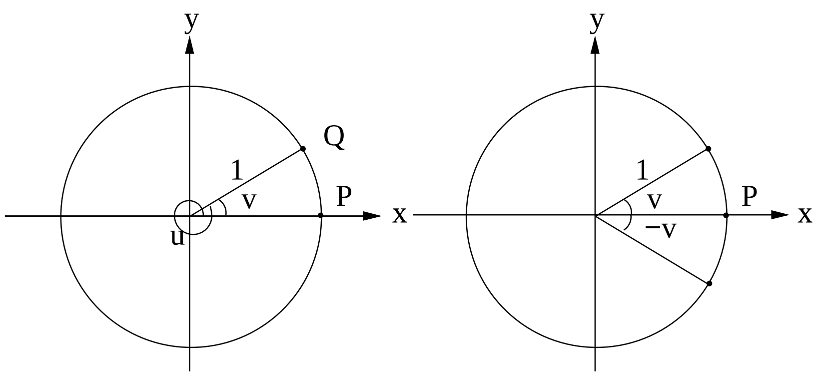
c) $(1,6)$ och $(-3,-2)$ och har medelpunkt på y-axeln.

3.4 Trigonometri

3.4.1 De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar

I avsnitt 3.1.2 beskrev vi hur man mäter en vinkel med längden av en cirkelbåge. Detta skall vi utnyttja nu för att definiera $\sin v$, $\cos v$, $\tan v$ och $\cot v$ för godtyckliga vinklar.

I ett xy-plan är origo, O, medelpunkt i enhetscirkeln $x^2+y^2=1$. Punkten $P=(1,0)$ är cirkelns skärningspunkt med positiva x-axeln. Tänk dig nu sträckan OP likt en visare på en klocka vrids *moturs* runt origo så att P:s färd längs enhetscirkeln har längd v och att den hamnar i Q. Vinkeln mellan strålens utgångsläge OP och dess slutläge OQ ges då måttet v radianer. Observera att om man vrider $v+2\pi$ radianer så hamnar punkten P också i Q eftersom 2π radianer motsvarar vridning ett varv moturs.

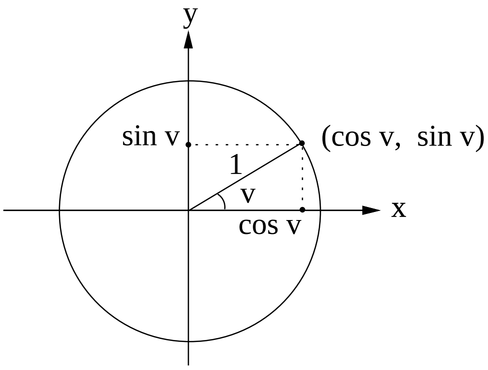


(a) Vinkeln u är $2\pi+v$. (b) En vinkel och dess negativa motsvarighet.

Figur 24: Allmänna vinklar.

Om visaren i stället vrids *medurs* ges vinkeln måttet $-v$ radianer.

Det finns en stor fördel med detta synsätt. Vi kan tänka oss att visaren vrids mer än ett varv och låta vinkeln vara längden av den genomlöpta cirkelbågen. Vinklar kan då vara större än 2π. Dessa har inte längre någon geometrisk motsvarighet. Den punkt som motsvarar vinkeln $\frac{5\pi}{2}$ är $(0,1)$ eftersom $\frac{5\pi}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}$. Visaren vrids ett och ett kvarts varv. Vinklarna $\frac{5\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ motsvaras av *samma punkt* men är *olika vinklar*. Om visaren vrids *medurs* är vinkeln negativ. Vinkeln $-\frac{3\pi}{2}$ motsvaras också av $(0,1)$.



Figur 25: Enhetscirkeln.

En första observation vi kan göra är att om

$$0 < v < \frac{\pi}{2}$$

så är $Q = (\cos v, \sin v)$, eftersom vi har en rätvinklig triangel med en hypotenusa av längd 1. Denna observation ligger till grund för den allmänna definitionen av de trigonometriska funktionernas värden för godtyckliga vinklar.

Definition: Låt $Q = (x, y)$ motsvara vinkeln v enligt ovan. Då är

$$\cos v = x,\ \sin v = y,\ \tan v = \frac{y}{x} \text{ om } x \neq 0 \text{ och } \cot v = \frac{x}{y} \text{ om } y \neq 0.$$

För vinklar v sådana att $x = 0$ är $\tan v$ odefinierat. För vinklar v sådana att $y = 0$ är $\cot v$ odefinierat.

Eftersom en ökning eller minskning av v med 2π motsvarar en vridning av ”visaren” OP ett helt varv mot- eller medurs följer det att sinus och cosinus är *periodiska*. Närmare bestämt så har vi följande:

$$\begin{aligned} \sin v &= \sin(v + 2\pi) = \sin(v + n \cdot 2\pi), \text{ för alla } n \in \mathbb{Z} \\ \cos v &= \cos(v + 2\pi) = \cos(v + n \cdot 2\pi), \text{ för alla } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exempel. Vi bestämmer $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Lösning. Vi har att $-\frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 2\pi$. Detta ger att

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

eftersom en ändring av vinkeln med -2π ger samma värde för sinus. □

Från definitionerna gör vi direkt följande grundläggande och viktiga observationer:

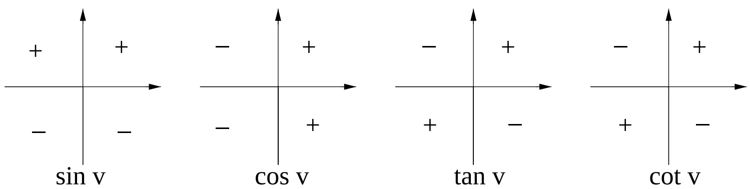
$$
\begin{aligned}
1 &= \sin^2 v + \cos^2 v \quad \text{(trigonometriska ettan)} \\
\tan v &= \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\cot v} \\
\cot v &= \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-1 \le \sin v \le 1, &\quad \text{d v s} \quad |\sin v| \le 1 \ \text{ för alla vinklar } v \\
-1 \le \cos v \le 1, &\quad \text{d v s} \quad |\cos v| \le 1 \ \text{ för alla vinklar } v
\end{aligned}
$$

Genom att bestämma den punkt som motsvarar en viss vinkel så får man enkelt följande tabell med värdena för vinklarna som svarar mot jämna kvartsvarv.

v	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin v$	0	1	0	-1	0
$\cos v$	1	0	-1	0	1
$\tan v$	0	odefinierat	0	odefinierat	0
$\cot v$	odefinierat	0	odefinierat	0	odefinierat

Eftersom $\sin v = y$ är $\sin v$ *positiv* för vinklar i första och andra kvadranten och *negativ* i tredje och fjärde. Liknande scheman fås för $\cos v$, $\tan v$ och $\cot v$:



Figur 26: Tecknet på de trigonometriska funktionerna i de fyra kvadranterna.

Exempel. Vi bestämmer $\sin v$, om $\cos v = 1/4$ och $3\pi/2 < v < 2\pi$.

Lösning. Från trigonometriska ettan $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ får vi att

$$\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v} \ \text{ eller } \ \sin v = -\sqrt{1-\cos^2 v},$$

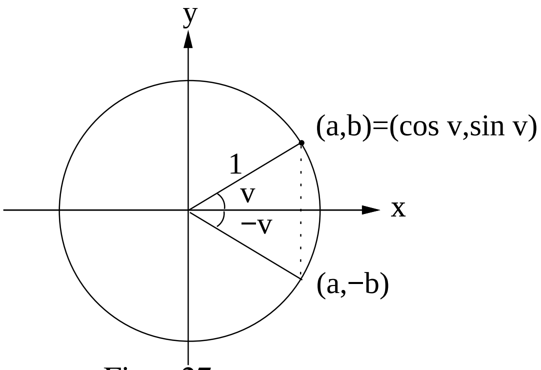
där tecknet beror på vilken kvadrant v ligger i. I fjärde kvadranten är $\sin v$ negativt, så

$$\sin v = -\sqrt{1-\cos^2 v} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

i detta fallet. □

3.4.2 Några enkla formler, som hänger samman med speglingar

Antag att punkten (a,b) på enhetscirkeln svarar mot vinkeln v, d v s att $a = \cos v$ och $b = \sin v$. Vi ritar (a,b) för enkelhets skull i första kvadranten, men tänk på att (a,b) är en godtycklig punkt på cirkeln, och att man behöver tänka igenom att argumenten duger även i de andra tre kvadranterna.



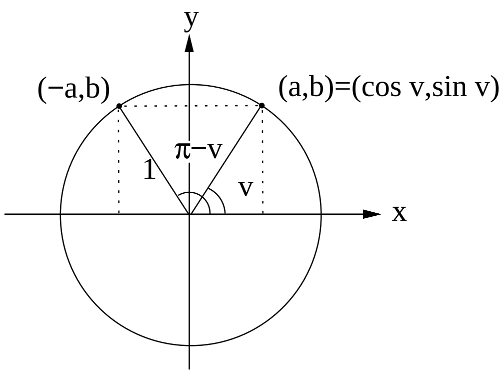
Figur 27: Spegling i x-axeln.

Speglar man (a,b) i x-axeln hamnar man i punkten $(a,-b)$ med vinkeln $(-v)$. Alltså är

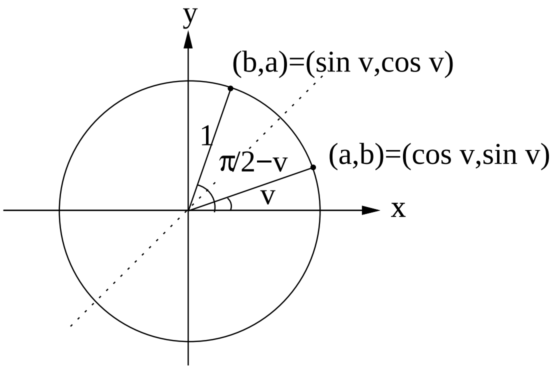
$$\begin{aligned}
\cos(-v) &= \quad a \quad &&= \cos v, \\
\sin(-v) &= \quad -b \quad &&= -\sin v, \\
\tan(-v) &= \quad \frac{-b}{a} \quad &&= -\tan v, \\
\cot(-v) &= \quad \frac{a}{-b} \quad &&= -\cot v.
\end{aligned}$$

Spegelpunkten till (a,b) med avseende på y-axeln är $(-a,b)$ med vinkeln $(\pi - v)$. Alltså är

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - v) &= \quad -a \quad &&= -\cos v, \\
\sin(\pi - v) &= \quad b \quad &&= \sin v, \\
\tan(\pi - v) &= \quad \frac{b}{-a} \quad &&= -\tan v, \\
\cot(\pi - v) &= \quad \frac{-a}{b} \quad &&= -\cot v.
\end{aligned}$$



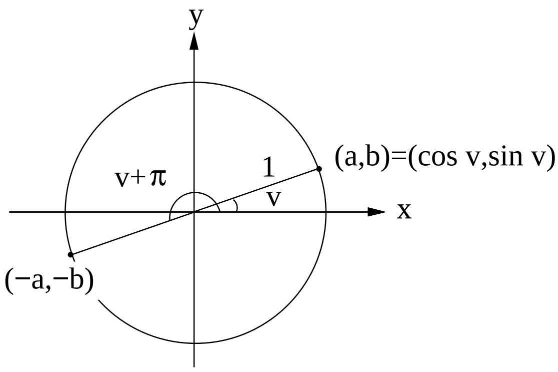
Figur 28: Spegling i y-axeln.



Figur 29: Spegling i linjen $x = y$.

Spegelpunkten till (a,b) med avseende på linjen linjen $y = x$ är (b,a) med vinkeln $\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$. Alltså är

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \quad b \quad = \sin v,\\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \quad a \quad = \cos v,\\
\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \quad \frac{a}{b} \quad = \cot v,\\
\cot\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= \quad \frac{b}{a} \quad = \tan v.
\end{aligned}
$$



Figur 30: Spegling i origo.

Spegling av (a,b) i origo ger $(-a,-b)$ med vinkeln $(v+\pi)$. Man får då

$$
\begin{aligned}
\cos(v+\pi) &= \quad -a \quad = -\cos v,\\
\sin(v+\pi) &= \quad -b \quad = -\sin v,\\
\tan(v+\pi) &= \quad \frac{-b}{-a} \quad = \tan v,\\
\cot(v+\pi) &= \quad \frac{-a}{-b} \quad = \cot v.
\end{aligned}
$$

Kommentar: Det är värdefullt att själv kunna härleda formlerna med hjälp av figurer i stället för att slå upp dem. Det är också värdefullt att kunna dem utantill.

Exempel. Bestäm $\sin\frac{5\pi}{6}$.

Lösning. Vinkeln $5\pi/6 = 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ = \pi - \pi/6$ ligger i andra kvadranten. (Rita figur!).

Sambandet $\sin(\pi - v) = \sin v$ ger

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

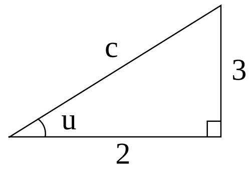
eftersom 30° är den minsta vinkeln i en halv liksidig triangel. □

Exempel. Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = -3/2$ och $-\pi/2 < v < 0$.

Lösning. Metod 1: Rita en hjälptriangel med $\tan u = 3/2$ och $0 < u < \pi/2$, så kateterna ska ha längderna 2 respektive 3. Triangeln behöver inte vara skalenlig, den är endast ett stöd för kalkylerna.

Pythagoras sats ger $c = \sqrt{13}$. Då är $\sin u = 3/\sqrt{13}$ och $\cos u = 2/\sqrt{13}$. Av formlerna ovan följer att $\sin v = \pm \sin u$ och $\cos v = \pm \cos u$. I fjärde kvadranten är $\sin v < 0$ och $\cos v > 0$. Alltså är

$$\sin v = -3/\sqrt{13} \text{ och } \cos v = 2/\sqrt{13}.$$



Figur 31: Hjälptriangel.

Metod 2: Använd formeln $\tan v = \sin v / \cos v$ samt trigonometriska ettan:

$$\begin{cases} \tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = -\frac{3}{2} \\ \sin^2 v + \cos^2 v = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sin v = -\frac{3}{2}\cos v \\ \frac{9}{4}\cos^2 v + \cos^2 v = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos v = \pm 2/\sqrt{13} \\ \sin v = \mp 3/\sqrt{13}. \end{cases}$$

Eftersom $\cos v > 0$ och $\sin v < 0$ i fjärde kvadranten, får vi följande

Svar: $\sin v = -3/\sqrt{13}$ och $\cos v = 2/\sqrt{13}$. □

3.4.3 Snedvinkliga trianglar. Areasatsen. Sinus- och cosinusteoremen.

En triangel har antingen tre spetsiga vinklar, den kallas då spetsvinklig, eller en trubbig och två spetsiga då den kallas trubbvinklig, eller en rät vinkel och två spetsiga då den som bekant kallas rätvinklig.

Ganska ofta beror kalkyler eller resonemang på om triangeln är spets-, rät-, eller trubbvinklig. Det är därför viktigt att övertyga sig om att påståenden etc är allmängiltiga och inte bara gäller t ex spetsvinkliga trianglar.

För att illustrera detta inleder vi med följande sats för att beräkna arean av en triangel.

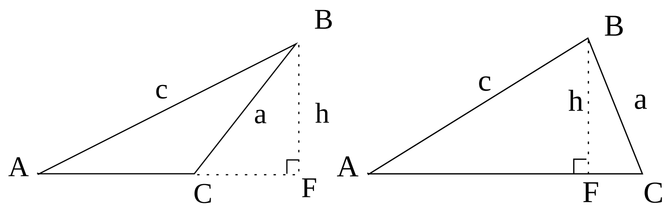
Areasatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller för *triangelns area* T att

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Med andra ord så är arean halva produkten av två sidors längder och sinus för deras mellanliggande vinkel.

För att bevisa areasatsen konstaterar vi att arean av en triangel är *basen* gånger *höjden* genom 2. I båda trianglarna i figur 32 är basen $|AC| = b$. Punkten F är fotpunkt till höjden som kan beräknas på två sätt. Dels är $h = c \cdot \sin A$, men h kan även beräknas med hjälp av a och C. I den trubbvinkliga triangeln är $h = a \cdot \sin(\pi - C)$, i den spetsvinkliga är $h = a \cdot \sin C$. Men $\sin(\pi - C) = \sin C$. Alltså gäller $h = a \cdot \sin C$ i båda trianglarna. Vi har då att

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{b \cdot a \cdot \sin C}{2}.$$



(a) Trubbvinklig triangel. (b) Spetsvinklig tiangel.

Figur 32: Två fall i areasatsen.

Givetvis kan man låta de två triangelhörnen A och B byta roll vilket innebär att det även gäller att $T = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}$ och satsen är bevisad.

Om arean T multipliceras med 2 och divideras med abc erhålls följande sats.

Sinusteoremet: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller att

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Anmärkning: Vi bevisade inte Areasatsen (och därmed inte heller Sinusteoremet) för rätvinkliga trianglar. De gäller naturligtvis även för rätvinkliga trianglar och det är en bra övning att visa dem också i detta (det enklaste) fallet. Prova att göra det!

Exempel. Solvera en triangel, d v s beräkna alla sidor och vinklar, med $a = 7{,}0$, $b = 5{,}5$ och $B = 40^\circ$.

Lösning: Sinusteoremet ger

$$\sin A = \frac{a}{b} \cdot \sin B = \frac{7{,}0}{5{,}5} \cdot \sin 40^\circ \approx \frac{7{,}0}{5{,}5} \cdot 0{,}643 \approx 0{,}818.$$

Ekvationen $\sin A \approx 0{,}818$ har lösningar

$$A_1 \approx 54{,}9^\circ \text{ (spetsig vinkel) och } A_2 = 180^\circ - A_1 \approx 125{,}1^\circ \text{ (trubbig vinkel),}$$

ty $\sin A_2 = \sin(180^\circ - A_1) = \sin A_1$.

Fall 1: $A_1 \approx 54{,}9^\circ$ ger vinkeln $C_1 = 180^\circ - B - A_1 \approx 85{,}1^\circ$. Med sinusteoremet fås sidan

$$c_1 = b \cdot \frac{\sin C_1}{\sin B} \approx 5{,}5 \cdot \frac{\sin 85{,}1^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 5{,}5 \cdot \frac{0{,}996}{0{,}643} \approx 8{,}5.$$

Fall 2: $A_2 \approx 125,1^\circ$ ger vinkeln $C_2 = 180^\circ - B - A_2 \approx 14,9^\circ$, och sidan

$$c_2 = b \cdot \sin C_2 / \sin B \approx 5,5 \cdot \sin 14,9^\circ / \sin 40^\circ \approx 5,5 \cdot 0,257/0,643 \approx 2,2.$$

Svar: De två fallen $A_1 \approx 54,9^\circ$, $C_1 \approx 85,1^\circ$, $c_1 \approx 8,5$ respektive $A_2 \approx 125,1^\circ$, $C_2 \approx 14,9^\circ$, $c_2 \approx 2,2$. □

Vi skall nu härleda **cosinusteoremet** för en triangel. Vi använder beteckningarna i figur 32. Låt $|AC| = b$ och $|CF| = p$. Då är

$$p = a \cdot \cos(\pi - C) = -a \cdot \cos C$$

om C är trubbig och $p = a \cdot \cos C$ om C är spetsig. I båda fallen är

$$|AF| = b - a \cdot \cos C.$$

Pythagoras sats (på de två deltrianglarna) ger, både då C är trubbig och då C är spetsig att

$$a^2 = h^2 + p^2 = h^2 + (\pm a \cdot \cos C)^2 = h^2 + (a \cdot \cos C)^2$$

och

$$c^2 = h^2 + (b - a \cdot \cos C)^2 = h^2 + (a \cdot \cos C)^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Vi har alltså visat

Cosinusteoremet: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Anmärkning: I specialfallet $C = 90^\circ$ fås $c^2 = a^2 + b^2$, d v s Pythagoras sats.

3.4.4 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 3b

3.4.1 I vilken kvadrant ligger vinkeln

a) $5\pi/4$ b) 500° c) -200° d) 1000°

e) $27\pi/4$ f) $-100\pi/3$ g) $-10000°$

3.4.2 Bestäm

a) $\cos 13\pi$ b) $\sin(-13\pi/2)$ c) $\sin(13\pi/3)$

d) $\cos(13\pi/6)$ e) $\tan(137\pi)$ f) $\tan(137\pi/4)$

3.4.3 Visa att

a) $1/\cos^2 v = 1+\tan^2 v$ b) $1/\sin^2 v = 1+\cot^2 v$

3.4.4 Bestäm $\cos v$, om

a) $\sin v = 1/3$, med v i första kvadranten
b) $\sin v = -2/5$, med v i fjärde kvadranten
c) $\sin v = 2/3$

3.4.5 Bestäm $\sin v$, om

a) $\cos v = -0,6,\ \pi/2 < v < \pi$ b) $\cos v = 0,4$

3.4.6 Bestäm $\tan v$ om

a) $\sin v = 1/4$, v i 2:a kvadranten b) $\cos v = 0,3$, v i 4:e kvadranten

c) $\sin v = -0,5$ d) $\cos v = 2/9$

3.4.7 Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om

a) $\tan v = 2$, $\pi < v < \frac{3\pi}{2}$ b) $\tan v = -1/3$, $\frac{\pi}{2} < v < \pi$

c) $\tan v = -5$ d) $\cot v = -2$

3.4.8 Bestäm

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ c) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ d) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e) $\sin\frac{3\pi}{4}$

f) $\cos\frac{2\pi}{3}$ g) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ h) $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ i) $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ j) $\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

3.4.9 Solvera en triangel, med beteckningar som i figur 32, där

a) $a = 7,2$, $b = 4,5$ och $A = 58,3°$
b) $b = 41,6$, $c = 63,5$ och $B = 28,5°$

c) $a = 15,6$, $c = 11,6$ och $C = 31,2°$

d) $a = 20,4$, $b = 5,1$ och $B = 40,1°$

3.4.10 Solvera en triangel, med beteckningar som i figur 32, där

a) $a = 17,0$, $b = 8,0$ samt $C = 39,5°$

b) $b = 3,9$, $c = 8,1$ samt $A = 117,1°$

c) $a = 57,2$, $c = 16,4$ samt $B = 22,7°$

3.4.11 Beräkna arean av en triangel med beteckningar som i figur 32, där

a) $a = 5,0$, $b = 7,0$ samt $C = 60°$ b) $a = 4,0$, $c = 6,0$ samt $B = 40°$

c) $b = c = 3,0$ samt $A = 110°$

4 Funktioner

Begreppet funktion har du säkert stött på i gymnasiets kurser i matematik, fysik och kemi. Där lär man sig (förmodligen) att en funktion är en regel för att till ett eller flera tal ordna exakt ett tal. Exempelvis är funktionen $f(x) = x+2$ den regel som till varje tal x ordnar talet $x+2$ så att t ex $f(4) = 4+2 = 6$ och $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}+2$. Ett annat exempel är funktionen $h(a,b) = a+b+4$ som till varje talpar (a,b) ordnar talet $a+b+4$, så att t ex $h(0,0) = 4$ och $h(4.3\,,7.2) = 15.5$ (vi ansänder här decimalkomma istället för decimalkomma, vilket skulle bli förvirrande). Notera att de specifika bokstäverna x, a och b är oviktiga, d v s funktionen f i exemplet ovan kan precis lika gärna anges via $f(c) = c+2$ eller via $f(r) = r+2$ etc och h kan lika gärna anges via $h(j,q) = j+q+4$.

Vi ska här inte ändra på gymnasiets tolkning av funktionsbegreppet, men vi ska göra det en aning mer allmänt.

4.1 Funktionsbegreppet, grafbegreppet, inverser

4.1.1 Funktionsbegreppet

Den allmänna definitionen av funktionsbegreppet är:

En funktion f från mängden A till mängden B är en regel som till varje element $a \in A$ ordnar ett entydigt element $f(a) \in B$.

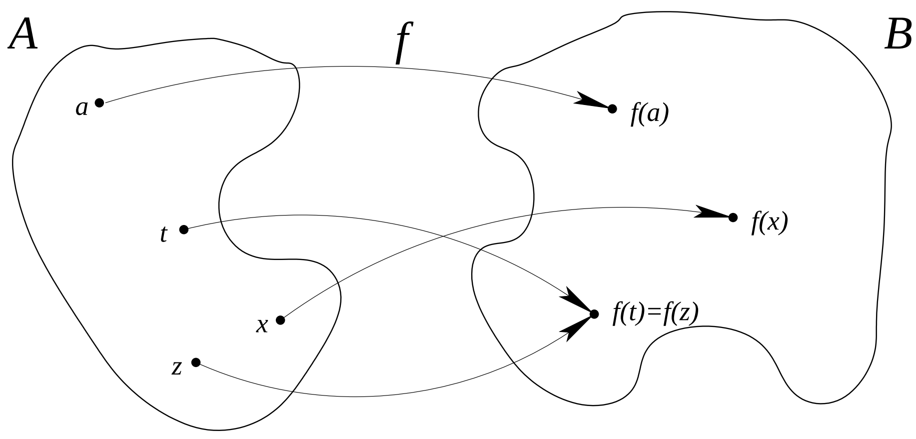
Lite löst sagt: Man stoppar in ett element från A i f och får ut ett element i B. Att f är en funktion från A till B skrivs på symbolisk form som

$$f : A \to B.$$

Om man vill beteckna vad som händer med ett element a kan man skriva

$$a \mapsto f(a)$$

vilket utläses som att "a avbildas på $f(a)$". En illustration till funktionsbegreppet finns i figur 33.



Figur 33: En illustration av funktionsbegreppet: Punkterna a, t, x och z i A avbildas på punkterna $f(a)$, $f(t)$, $f(x)$ respektive $f(z)$ i B.

Mängden A kallas för f's *definitionsmängd* eller *definitionsområde*, medan mängden B kallas för f's *målmängd*. Om C är en delmängd av A sätter man

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\},$$

d v s $f(C)$ är mängden av alla möjliga värden av $f(x)$ om x får väljas fritt i C. Man kallar $f(C)$ för *bilden av C*. Mängden $f(A)$, d v s bilden av hela definitionsmängden, kallas för f's *värdemängd*.

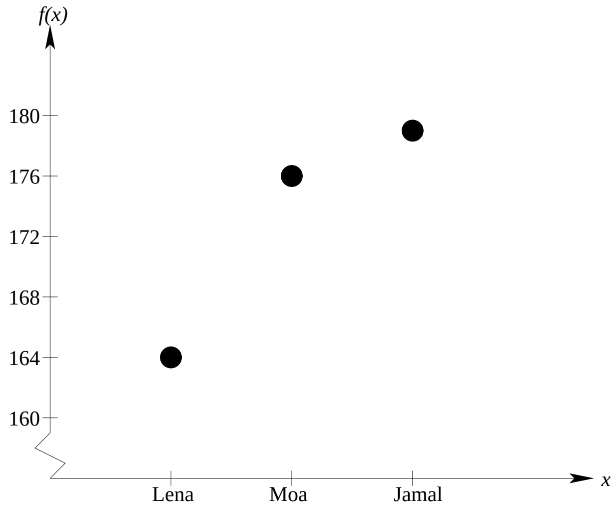
Exempel. Låt A vara mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B vara mängden av Sveriges 290 kommuner. En tänkbar funktion $g : A \to B$ är då att låta $g(x)$ vara den kommun där riksdagledamoten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Detta är en OK definition då varje ledamot är folkbokförd (eller har varit folkbokförd senast) i exakt en svensk kommun. Vi har t ex (i skrivande stund) att g("Maud Olofsson")="Robertsfors". Värdemängden blir alla de kommuner i vilken det finns (eller senast var) en riksdagsledamot folkbokförd.

Däremot är t ex $h : A \to B$ med $h(x)$ den kommun där riksdagledamoten x äger en fastighet **inte** någon funktion, eftersom det inte är så att varje ledamot äger fastighet i exakt 1 kommun (vissa äger ingen och vissa äger i fler än 1 kommun). $\square$

4.1.2 Grafen till en funktion

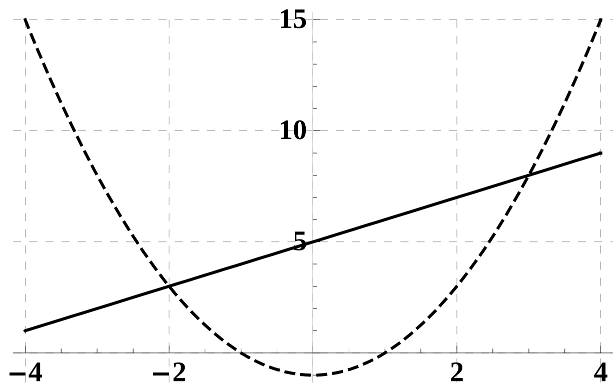
Ett sätt att illustrera en funktion är att rita dess *graf*. Formellt definieras grafen till en funktion $f : A \to B$ som mängden $\{(x, f(x)) : x \in A\}$. Man bildar alltså alla möjliga par av värden i definitionsmängden och dess funktionsvärde.

Exempel. Låt $A = \{\text{Lena, Arne, Jamal}\}$ och låt funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ ges av att $f(\text{Lena}) = 164$, $f(\text{Arne}) = 176$ och $f(\text{Jamal}) = 179$ (de tre personernas längd i centimeter). Då är $f(A) = \{164, 176, 179\}$. I figur 34 finns f's graf utritad. $\square$



Figur 34: Grafen till funktionen given av Lenas, Arnes och Jamals längd.

Exempel. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 1$. Då är $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ medan $g(\mathbb{R}) = [-1, \infty)$. Delar av de båda funktionernas grafer finns i figur 35 $\square$



Figur 35: Delar av graferna till funktionerna $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 1$.

4.1.3 Invers funktion

En viktig egenskap som en funktion kan ha är att olika element alltid avbildas på olika element. Mer precist, om $f : A \to B$ så ska det gälla att om $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ och $a_1 \neq a_2$ så är $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funktion med denna egenskap säges vara *injektiv*.

Exempel. Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $h(x) = x^2$ är **inte** injektiv, ty t ex har vi att $h(1) = h(-1) = 1$.

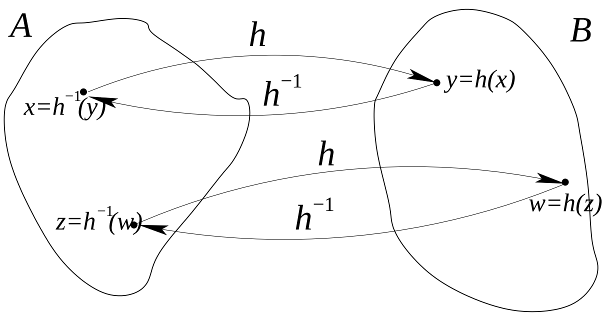
Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x + 2$ är injektiv, ty funktionens värde växer hela tiden då x ökar så den antar inte samma värde två gånger.

Betrakta funktionen vi hade tidigare i ett exempel där A var mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B var mängden av Sveriges 290 kommuner med $g : A \to B$ där $g(x)$ är den kommun där riksdagledamoten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Denna är garanterat **inte** injektiv, ty det finns fler ledamöter än kommuner så minst en av kommunerna måste ha mer än 1 representant i riksdagen. □

Antag att funktionen $h : A \to B$ är injektiv och vi vet att $h(x) = b$ för något $b \in B$. Eftersom funktionen är injektiv så vet vi att det finns bara ett x som är sådant att $h(x) = b$. Detta kan vi göra för alla b som ligger i värdemängden, $h(A)$. Vi kan alltså definiera en funktion

$$h^{-1} : h(A) \to A \text{ med } h^{-1}(y) = x \text{ om } h(x) = y.$$

Denna funktion kallas för *inversen* till funktionen h och betecknas som ovan med h^{-1}. Med ord kan man säga att inversen h^{-1} tar funktionsvärdena till h tillbaka till deras ursprung (figur 36 illustrerar).



Figur 36: Inversen till en funktion.

Observera att det **bara** är injektiva funktioner som kan ha invers. Om $f(x_1) = f(x_2) = y$ med $x_1 \neq x_2$ så kan man ju inte avgöra om en eventuell invers skulle ta y till x_1 eller x_2.

Exempel. Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x+2$ är injektiv så den har en invers. För att hitta denna sätter vi $y = g(x) = x+2$ och löser sedan ut x och vi får $x = y-2 = g^{-1}(y)$ enligt definitionen ovan. Värdemängden av g är alla reella tal så g^{-1} är definierad för alla reella tal så

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{med} \qquad g^{-1}(y) = y-2.$$

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ är inte injektiv så den saknar invers.

Däremot är $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ med $h(x) = x^2$ injektiv, ty denna växer hela tiden och kommer inte att anta samma värde mer än 1 gång. Likheten $y = h(x) = x^2$ ger $x = \sqrt{y} = h^{-1}(y)$. Detta kan vi göra eftersom $x \geq 0$, så vi kan utesluta lösningen $x = -\sqrt{y}$.

Lika så är $k : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ med $k(x) = x^2$ injektiv, ty denna avtar hela tiden och kommer inte att anta samma värde mer än 1 gång. Likheten $y = k(x) = x^2$ ger nu $x = -\sqrt{y} = k^{-1}(y)$. Detta kan vi göra eftersom $x \leq 0$, så vi kan utesluta lösningen $x = \sqrt{y}$.

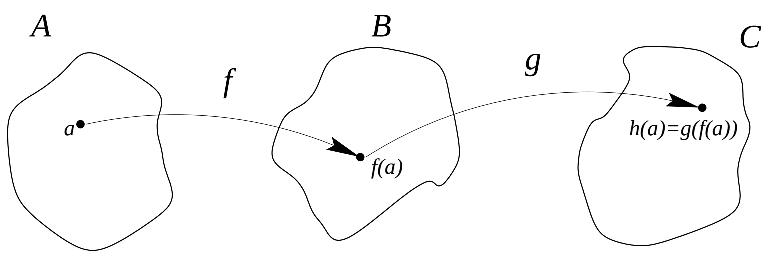
$\square$

4.1.4 Sammansättning av funktioner

Antag att f är en funktion från A till B och att g är en funktion från B till någon tredje mängd C, d v s det som “kommer ut” från f går att “stoppa in” i g. Man kan då bilda en ny funktion h från A till C genom att för varje $x \in A$ sätta

$$h(x) = g(f(x)).$$

Funktionen h kallas för *sammansättningen* av f och g och man skriver $h = g \circ f$, d v s man har $g \circ f : A \to C$, se figur 37.



Figur 37: Den sammansatta funktionen $h = g \circ f$.

Exempel. Betrakta funktionen vi hade tidigare i ett exempel där A var mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B var mängden av Sveriges 290 kommuner med $f : A \to B$ där $f(x)$ är den kommun där riksdagledamöten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Låt $g : B \longrightarrow \mathbb{N}$ vara funktionen som definieras av att $g(y)$ är antalet invånare i kommunen y vid årsskiftet 2008/2009. Vi tittar på sammansättningen $h = g \circ f$. Om man startar med en riksdagsledamot x så är $f(x)$ dennes kommun och $g(f(x))$ denna kommuns invånarantal. Därmed är $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ inget annat än antalet invånare i riksdagsledamoten x:s kommun. $\square$

Det är viktigt att observera att $g \circ f$ och $f \circ g$ i regel är olika saker. Det är ju inte säkert att $f \circ g$ ens existerar bara för att $g \circ f$ existerar; det hänger på om utgången till g passar ihop med ingången till f, d v s om $A = C$. I det allmänna fallet gäller inte detta så det ska snarare betraktas som undantag än regel att även $f \circ g$ existerar. Även om både $f \circ g$ och $g \circ f$ existerar så är de i allmänhet olika.

Exempel. I exemplet ovan med kommuner och riksdagsledamöter är inte $f \circ g$ definierat, ty ut från g kommer det naturliga tal och dessa kan man inte stoppa in i f för f vill ju ha riksdagsledamöter.

Betrakta funktionerna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x+2$. Här både $f \circ g$ och $g \circ f$ definierade då det hela tiden är reella tal som åker in och ut (och funktionerna tillåter vilka reella tal som helst som invärde). Däremot är de inte lika för

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

men

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2,$$

så t ex $f \circ g(0) = 4$ medan $g \circ f(0) = 2$. $\square$

Låt f vara en funktion med invers f^{-1} och låt x och y vara sådana att $y = f(x)$ (och därmed är $x = f^{-1}(y)$). Då gäller att

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \text{ och } f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

Alltså gäller att sammansättningarna $f \circ f^{-1}$ och $f^{-1} \circ f$ båda returnerar precis det man stoppar in. En funktion h som bara returnerar det man stoppar in, d v s $h : A \longrightarrow A$ med $h(x) = x$, kallas för *identitetsfunktionen* på A. Med andra ord så är alltså sammansättningarna av en funktion med dess invers alltid identitetsfunktioner för respektive definitionsmängd.

Exempel. Betrakta funktionen $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ med $f(x) = x^2$. Denna har som vi sett tidigare inversen $f^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ med $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Om vi sätter samman dem så får vi precis som väntat

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

(ty $x \geq 0$) och

$$f \circ f^{-1}(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

d v s båda sammansättningarna är identitetsfunktionen. $\square$

4.1.5 Reella värda funktioner av en reell variabel

De funktioner som är viktigast i den här kursen är funktioner som har definitions- och värdemängd som är (delmängd till) de reella talen. I resten av avsnitten i det här kapitlet kommer vi att systematiskt gå igenom ett antal olika typer av sådana funktioner, d v s *reellvärda funktioner av en reell variabel*.

Det finns några egenskaper som är intressanta och specifika för desssa funktioner. De vi ska titta på här är växande/avtagande och udda/jämn.

Begreppen växande/avtagande avser hur funktionsvärdena varierar då variabelns värde ökar. Vi har följande definitioner:

Låt A och B vara två delmängder till de reella talen. En funktion $f : A \to B$ säges vara

- *växande* om $f(y) \geq f(x)$ då $y > x$.
- *strängt växande* om $f(y) > f(x)$ då $y > x$.
- *avtagande* om $f(y) \leq f(x)$ då $y > x$.
- *strängt avtagande* om $f(y) < f(x)$ då $y > x$.

En funktion som är strängt växande (avtagande) är per definition automatiskt också växande (avtagande). En funktion som är strängt växande eller strängt avtagande är alltid injektiv, eftersom den hela tiden för växande argument antar nya större (mindre) värden.

Exempel. Vi hade i ett exempel tidigare funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x+2$. Denna är strängt växande, ty om $x < y$ så är $g(x) = x+2 < y+2 = g(y)$.

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ är varken växande eller avtagande, ty t ex har vi $-1 > -2$ och $f(-1) < f(-2)$, men $2 > 1$ och $f(2) > f(1)$. Däremot är den strängt avtagande på intervallet $(-\infty, 0]$ och sedan strängt växande på intervallet $[0, \infty)$. Om vi alltså sätter $f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ och $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ med $f_1(x) = x^2$ och $f_2(x) = x^2$ så är f_1 strängt avtagande och f_2 strängt växande. Det enda vi gjorde var alltså att ändra definitionsmängden. □

Härnäst ska vi införa begreppen udda och jämn funktion som handlar om relationen mellan $f(a)$ och $f(-a)$. Vi har följande definitioner:

Låt A och B vara två delmängder till de reella talen, där A har egenskapen att om $a \in A$ så måste också $(-a) \in A$. En funktion $f(x) : A \to B$ säges vara

- *jämn* om $f(x) = f(-x)$ för alla $x \in A$.
- *udda* om $f(x) = -f(-x)$ för alla $x \in A$.

Observera att villkoret på A är synonymt med att A är symmetrisk kring 0.

Bakgrunden till betckningarna *jämn* och *udda* är att funktionen $f(x) = x^n$ är jämn om n är ett jämnt heltal, men udda om n är ett udda heltal:

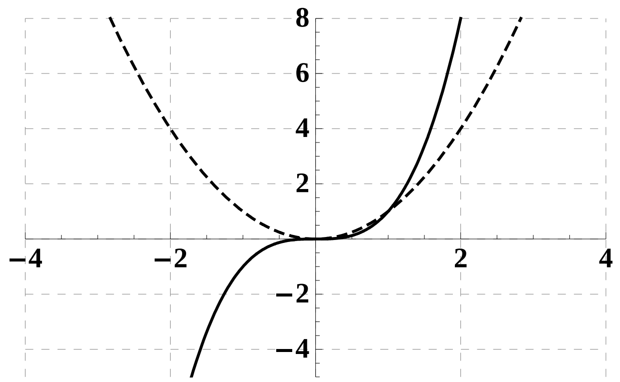
Exempel. I figur 38 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^3$ och $f_2(x) = x^2$. Funktionen $f_1(x)$ är udda eftersom

$$f_1(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f_1(x),$$

och funktionen $f_2(x)$ är jämn eftersom

$$f_2(x) = (-x)^2 = x^2 = f_2(x).$$

Geometriskt för grafen så betyder jämn att grafen ser likadan ut om den speglas i y-axeln och udda betyder att grafen ser likadan ut om den speglas i origo. □



Figur 38: Centrala delen av grafen av $f_1(x) = x^3$ (heldragen) och $f_2(x) = x^2$ (streckad).

4.1.6 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 4a

4.1.1 Låt A vara mängden av frukthandlare Lisas vattenmeloner. Vi definierar en funktion $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ genom att låta $f(x)$ vara melonen x vikt i (hela) gram. Vi definierar också en funktion $g : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ som $g(x) = px/1000$ där p är kilopriset (i kronor) på vattenmelonerna.

a) Är funktionen g injektiv?

b) Är funktionen f injektiv?

c) Beskriv funktionen $g \circ f$. Ange definitionsmängd och målmängd samt vad $g \circ f(x)$ är.

d) Är funktionen $g \circ f$ injektiv?

e) Vad är $f \circ g$?

4.1.2 Avgör om följande reella funktioner är (strängt) avtagande, (strängt) växande, injektiva, respektive udda eller jämna. Om funktionen är injektiv så bestäm inversen. Bestäm slutligen också funktionernas värdemängd.

a) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a(x) = x$

b) $b : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $b(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c(x) = x^2 + 2x$

d) $d : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $d(x) = x^2 + 1$

e) $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $e(x) = x^3 + 1$

4.1.3 Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara två reella funktioner givna av $f(x) = x^2 - 1$ och $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Bestäm sammansättningarna $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ och $g \circ g$.

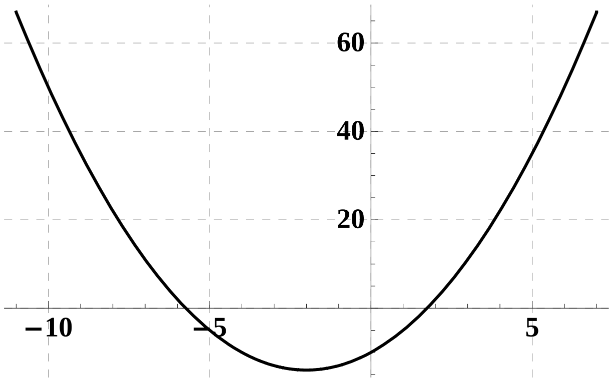
4.2 Polynom

Ett viktigt exempel på funktioner är *polynom(funktioner)*. Vi har tidigare tittat på polynom och ett polynom

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

kan man se som en funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Med andra ord så kan man alltid sätta in vilket reellt tal som helst och ut kommer ett reellt tal.

Exempel. Andragradspolynomet $f(x) = x^2 + 4x - 10$ kan vi kvadratkomplettera och vi får $f(x) = (x+2)^2 - 14$. Från en kvadratkomplettering kan man sedan läsa ut det mesta man kan tänkas vilja veta om polynomet som funktion. Nollställena blir $x_1 = -2 + \sqrt{14}$ och $x_2 = -2 - \sqrt{14}$. Det minsta värdet som funktionen antar är då $x + 2 = 0$ d v s $x = -2$ (eftersom $(x+2)^2 \geq 0$) och värdet är då $f(-2) = -14$. När x ligger långt till vänster eller höger på tallinjen så växer funktionen obegränsat och kommer därmed att anta alla värden som är större än eller lika med -14. Värdemängden till funktionen är alltså alla reella tal ifrån -14 och uppåt, d v s intervallet $[-14, \infty)$. Centrala delen av grafen finns i figur 39. Man ser de två nollställena, minimumet och att när x blir stort eller litet så tycks den försvinna uppåt. $\square$

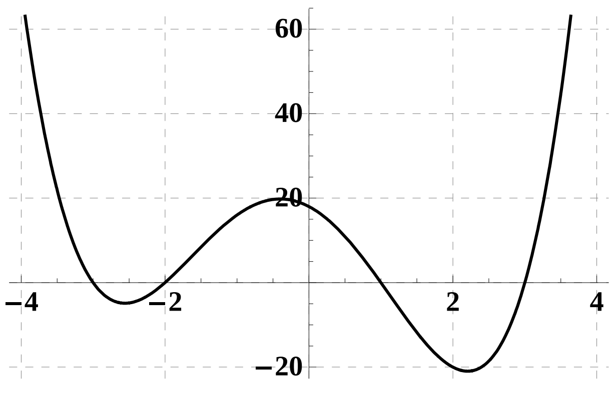


Figur 39: Centrala delen av grafen av andragradspolynomet $f(x) = x^2 + 4x - 10$.

Exempel. Vi tar en titt på polynomet

$$f(x) = (x-3)(x+3)(x-1)(x+2) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$$

som är av grad 4 och har fyra stycken olika (reella) nollställen. Centrala delen av grafen finns i figur 40. Man ser de fyra nollställena och när x blir stort eller litet så tycks den försvinna uppåt. För värden på variabeln x som är ligger långt till vänster eller höger på tallinjen är det alltid den term med högst potens som dominerar. I det här fallet är det x^4 som dominerar och denna har positiv koefficient (1) och *jämn* grad vilket gör att funktionen går mot oändligheten i båda ändarna. Värdemängden till funktionen är alla reella tal ifrån ca -21 (minimumet nära $x = 2$) och uppåt. $\square$

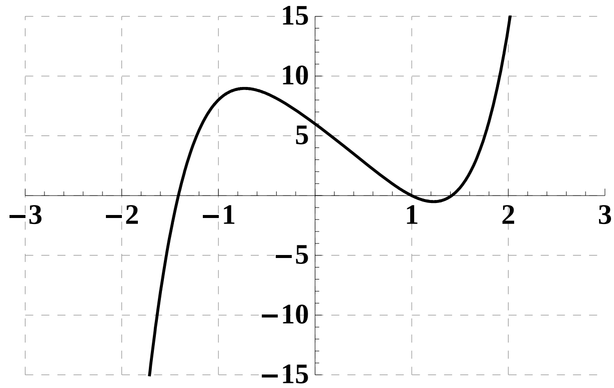


Figur 40: Centrala delen av grafen av fjärdegradspolynomet $f(x) = (x-3)(x+3)(x-1)(x+2) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$.

Exempel. Vi tittar nu på polynomet

$$f(x) = (x^2+3)(x-1)(x^2-2) = 6 - 6x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$$

som är av grad 5 och har tre stycken olika (reella) nollställen (vilka?). Centrala delen av grafen finns i figur 41. Man ser de tre nollställena och när x går åt höger på tallinjen försvinner den uppåt och när x går åt vänster försvinner den nedåt. Det är x^5 som dominerar och denna har positiv koefficient (1) och *udda* grad vilket gör att funktionen går mot oändligheten respektive minus oändligheten. Värdemängden till funktionen är alla reella tal. $\square$



Figur 41: Centrala delen av grafen av femtegradspolynomet
$f(x) = (x^2+3)(x-1)(x^2-2) = 6-6x-x^2+x^3-x^4+x^5$.

4.2.1 Övningar

4.2.1 Skissa grafen till följande polynomfunktioner av grad två samt ange rötter och värdemängd. **Tips:** Bestäm först eventuellt maximum eller minimum samt rötter med hjälp av kvadratkomplettering.

a) $p(x) = x^2+2x-7$

b) $p(x) = x^2-3x+6$

c) $p(x) = 5-4x-x^2$

4.2.2 Skissa grafen till följande polynomfunktioner. Ange nollställen och bestäm vad som händer när x går mot (plus eller minus) oändligheten.

a) $p(x) = (x^2-5)(x-1) = 5-5x-x^2+x^3$

b) $p(x) = (x^2+5)(x-1) = -5+5x-x^2+x^3$

c) $p(x) = (x^2-5)(x^2-1) = 5-6x^2+x^4$

4.3 Rationella funktioner

Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två polynom. Vi kan då bilda det rationella uttrycket $h(x) = f(x)/g(x)$. Då får man vad som kallas för en *rationell funktion* $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Här måste man vara lite försiktig, ty kvoten $h(x) = f(x)/g(x)$ är bara definierad för alla x sådana att $g(x) \neq 0$. Maximal definitionsmängd blir alltså $A = \{x : g(x) \neq 0\}$.

Observera att en rationell funktion $h(x) = f(x)/g(x)$ har ett nollställe i $x = a$ om och endast om $f(a) = 0$ och $g(a) \neq 0$.

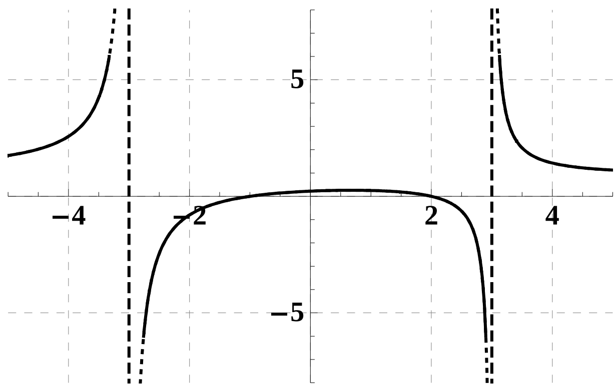
Exempel. Den rationella funktionen $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$h(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2-9}$$

har nollställen i 2 och -1 och som maximal definitionsmängd

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2-9) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\},$$

d v s alla reella tal utom -3 och 3. Centrala delen av grafen finns i figur 42. Observera att funktionen brakar iväg mot $-\infty$ respektive ∞ på de två sidorna om de två ställen där den inte är definierad. När x närmar sig $-\infty$ och ∞ så närmar sig funktionen 1, men mer om detta när vi kommer till avsnittet om gränsvärden. $\square$



Figur 42: Delar av grafen av den rationella funktionen $h(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2-9}$.

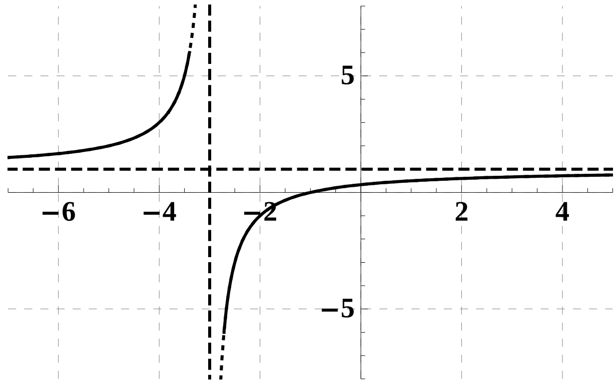
Exempel. Den rationella funktionen $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$h(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{x^2-9}$$

är inte definierad i $x = 3$, men genom att förkorta med faktorn $(x-3)$ så får vi en rationell funktion

$$r(x) = \frac{x+1}{x+3}.$$

Denna är lika med $h(x)$ överallt där $h(x)$ är definierad men också definierad i $x = 3$. Denna rationella funktion har som maximal definitionsmängd $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ och som enda nollställe $x = -1$. Centrala delen av grafen finns i figur 43. □



Figur 43: Centrala delen av grafen av den rationella funktionen $r(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$.

4.3.1 Övningar

4.3.1 Bestäm största möjliga definitionsmängd och alla nollställen till följande rationella funktioner. Försök gärna också göra en skiss av hur grafen ser ut.

a) $\dfrac{x-1}{x+2}$ b) $\dfrac{x-3}{x^2+2}$ c) $\dfrac{x^2-3}{x+2}$ d) $\dfrac{x^2+4}{x^2-2}$

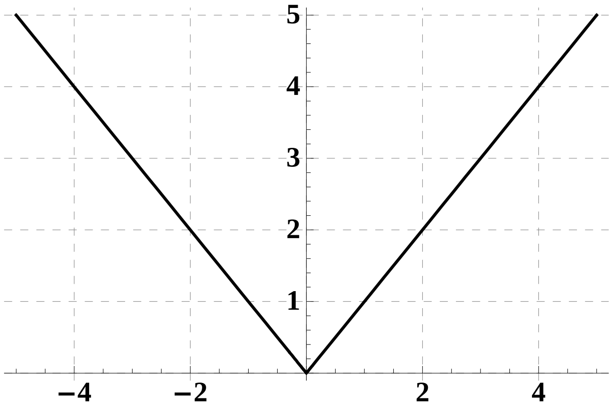
4.4 Absolutbeloppet

Absolutbeloppet har vi definierat tidigare och man kan se det som en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ där

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Observera här att det är två olika "formler" för absolutbeloppet beroende på om argumentet x är positivt eller negativt. Detta betyder att man när man arbetar med absolutbeloppet i regel delar upp i olika fall för två eller flera intervall.

Exempel. Den centrala delen av grafen till absolutbeloppsfunktionen finns i figur 44. Grafen består av två olika halvlinjer som möts i origo. Funktionen har ett enda nollställe nämligen $x = 0$ och går mot ∞ när x går mot $-\infty$ och ∞. □



Figur 44: Centrala delen av grafen av absolutbeloppsfunktionen $f(x) = |x|$.

När man sätter samman absolutbeloppsfunktionen med andra funktioner så blir det som väntat en aning mer komplicerat. Men det finns en allmän strategi att följa. Det gäller att dela upp i olika intervall beroende på när det som man tar absolutbeloppet av är positivt eller negativt. Vi illustrerar strategin med ett par exempel när man sätter samman absolutbeloppet med polynom.

Exempel. Vi tar en titt på den sammansatta funktionen $f(x) = |2x-3|$. Polynomet $2x-3$ har ett enda nollställe i $x = \frac{3}{2}$ och är positivt för alla $x > \frac{3}{2}$ och negativt för alla $x < \frac{3}{2}$. Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{om } x \geq \frac{3}{2}, \\ -(2x-3) & \text{om } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Grafen, som finns i figur 45, består alltså av två olika halvlinjer som möts i punkten $(\frac{3}{2}, 0)$. $\square$

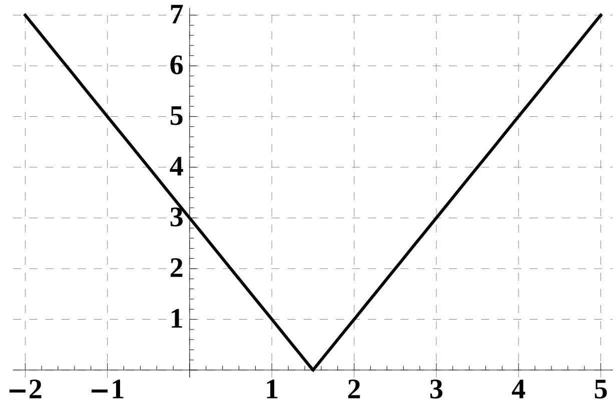
Exempel. Vi testar nu att sätta samman absolutbeloppet med ett andragradspolynom: $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$. Polynomet $x^2 - 3x + 2$ har två nollställen i $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$. Det är positivt för alla $x > 2$ och alla $x < 1$ samt negativt för alla x mellan nollställena, d v s $1 < x < 2$. Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{om } x \leq 1 \text{ eller } x \geq 2, \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{om } 1 < x < 2. \end{cases}$$

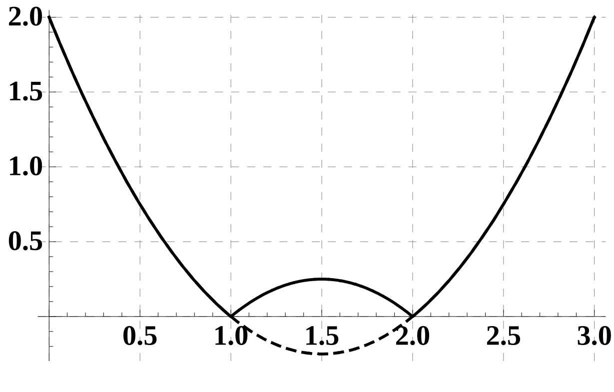
Grafen, som finns i figur 46, består alltså av tre olika segment av andragradskurvor. Den streckade kurvan är vad man fått om man tagit bort absolutbeloppet. Det blir helt enkelt en spegling av kurvan i x-axeln i intervallet $(1, 2)$. $\square$

Exempel. I det här exemplet ska vi se hur man angriper en funktion som innehåller fler än ett absolutbelopp. Låt

$$f(x) = |3x+2| - |x-1|.$$



Figur 45: Centrala delen av grafen av $f(x) = |2x - 3|$.



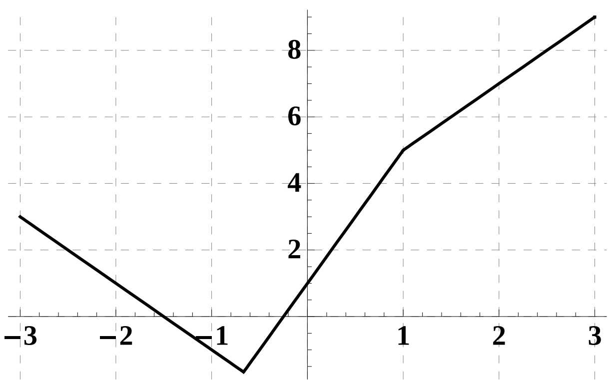
Figur 46: Centrala delen av grafen av $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$.

Polynomet $3x+2$ har ett enda nollställe i $x = -\frac{2}{3}$ och är positivt för alla $x > -\frac{2}{3}$ och negativt för alla $x < -\frac{2}{3}$. Polynomet $x-1$ har ett enda nollställe i $x = 1$ och är positivt för alla $x > 1$ och negativt för alla $x < 1$. Det betyder att vi får två brytpunkter. När $x > 1$ så är båda argumenten för absolutbeloppet positiva, när $x < -\frac{2}{3}$ så är båda negativa och mellan dessa brytpunkter är $3x+2$ positivt och $x-1$ negativt.

Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} (3x+2)-(x-1) = 2x+3 & \text{om } x \geq 1, \\ (3x+2)-(-(x-1)) = 4x+1 & \text{om } -\frac{2}{3} \leq x < 1, \\ -(3x+2)-(-(x-1)) = -2x-3 & \text{om } x \leq -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Grafen, som finns i figur 47, består alltså av tre olika delar av linjer som möts i punkterna $(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$ och $(1,5)$. □



Figur 47: Centrala delen av grafen av $f(x) = |3x+2| - |x-1|$.

4.4.1 Övningar

4.4.1 Dela upp i lämpliga intevall och ange funktionerna i vart och ett av dessa intervall utan absolutbelopp. Skissa funktionernas grafer.

a) $|x+2|$

b) $|5x-2|$

c) $\left|x^2-4\right|$

d) $|2x-2|+|2x+1|$

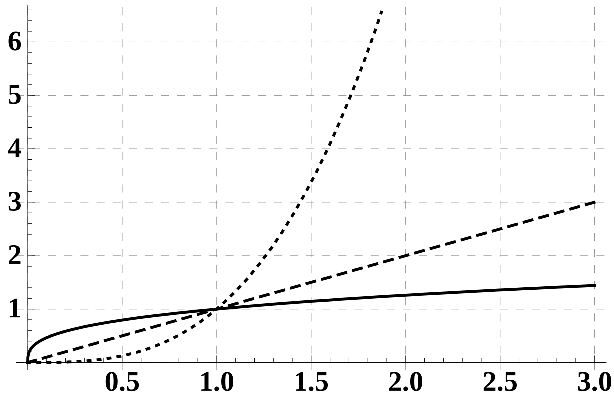
4.5 Potensfunktioner

Vi har i avsnitt 1.8 definierat potens med rationell exponent $b^{\frac{m}{n}}$ för $b \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Detta ger att vi för ett rationellt tal $\frac{m}{n}$ kan definiera en *potensfunktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ genom } f(x) = x^{\frac{m}{n}}.$$

En första sak att notera är att $f(1) = 1^{\frac{m}{n}} = 1$ för alla potensfunktioner.

Exempel. Vi tittar först på tre exempel då exponenten är positiv. I figur 48 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f_2(x) = x$ och $f_3(x) = x^3$. Vi observerar som vi redan påpekat att kurvorna skär varandra i punkten $(1,1)$. Alla närmar sig 0 då x närmar sig 0 och alla kommer gå mot ∞ när x går mot ∞. Vi ser att när $x > 1$ så är $f_3(x) = x^3$ störst och när $x < 1$ så är $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ störst. I allmänhet är det så att en potensfunktion med större exponent är större då $x > 1$ och en med mindre exponent är större då $x < 1$. □

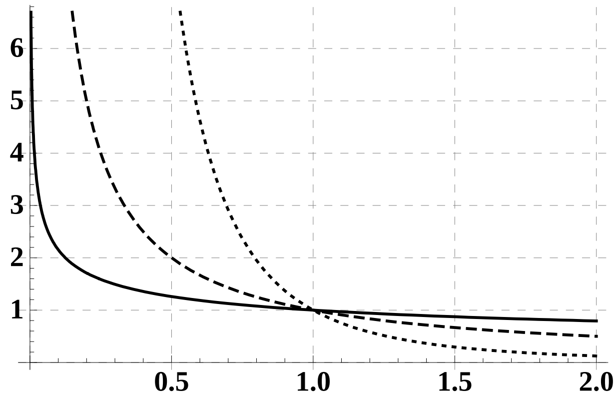


Figur 48: Början av grafen av $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (heldragen), $f_2(x) = x$ (streckad) och $f_3(x) = x^3$ (prickad).

Exempel. Vad händer när vi tar en negativ exponent? Tänk på att $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. I figur 49 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $f_2(x) = x^{-1} = 1/x$ och $f_3(x) = x^{-3}$. Vi noterar återigen att kurvorna skär varandra i punkten $(1,1)$. Alla närmar sig ∞ då x går mot 0 och alla kommer gå mot 0 när x går mot ∞. Vi ser att när $x > 1$ så är $f_3(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ störst och när $x < 1$ så är $f_3(x) = x^{-3}$ störst. I allmänhet är det precis som för positiva exponenter så att en potensfunktion med större exponent är större då $x > 1$ och en mindre exponent är större då $x < 1$. □

Anmärkning. När vi har en positiv heltalsexponent, som 1 respektive 3 i det första exemplet, så är ju potensfunktionen i själva verket också ett polynom. Då kan man förstås definiera funktionen för alla tal, inte bara de positiva. Om exponenten är positiv så kan man alltid definiera funktionen också för $x = 0$. Dessutom om exponenten är $1/n$ där n är udda heltal så existerar $x^{\frac{1}{n}}$ också för negativa tal x, så man kan också definiera potensfunktionen $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ för alla reella tal. Däremot finns t ex inte $x^{\frac{1}{2}}$ för negativa värden på x.

Observera till slut att alla potensfunktioner är antingen strängt växande (om exponenten är positiv) eller strängt avtagande (om exponenten är negativ) på $\mathbb{R}_+$ och att



Figur 49: Början av grafen av $f_1(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ (heldragen), $f_2(x) = x^{-1}$ (streckad) och $f_3(x) = x^{-3}(prickad)$.

värdemängden också är $\mathbb{R}_+$ i samtliga fall . Därmed har en potensfunktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ en invers $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Potensreglerna ger att om $f(x) = x^r$ och $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$ så gäller att

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{r}}) = (x^{\frac{1}{r}})^r = x^{\frac{1}{r} \cdot r} = x$$

och

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^r) = (x^r)^{\frac{1}{r}} = x^{r \cdot \frac{1}{r}} = x.$$

Alltså är $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$ invers till $f(x) = x^r$.

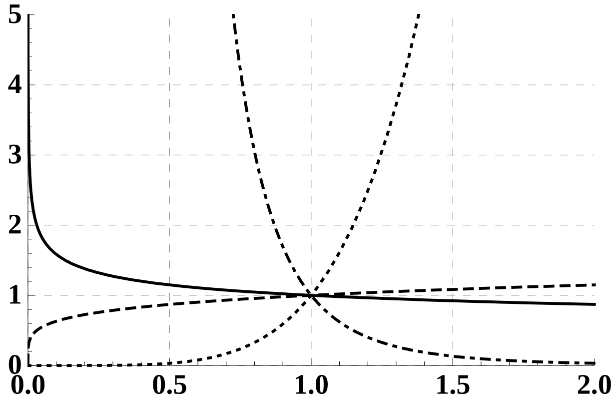
4.5.1 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 4b

4.5.1 I figur 50 finns delar av grafen till de fyra potensfunktionerna $f_1(x) = x^{-\frac{1}{5}}$, $f_2(x) = x^5$, $f_3(x) = x^{-5}$ och $f_4(x) = x^{\frac{1}{5}}$. Ange vilken som är vilken, inversen till respektive funktion samt ange maximal definitionsmängd för de fyra funktionerna.

4.6 Exponentialfunktioner, logaritmer

4.6.1 Exponentialfunktioner

Istället för att som för potensfunktioner låta basen b variera i en potens, b^r, så kan man låta exponenten r variera. Man får då en *exponentialfunktion*, $f(x) = b^x$, där b är en positiv konstant. En exponentialfunktion är definierad för alla reella tal och värdena är alltid positiva tal. Vi observerar att $f(0) = b^0 = 1$ oavsett vad b är, så grafen till en exponentialfunktion går alltid genom punkten $(0, 1)$.

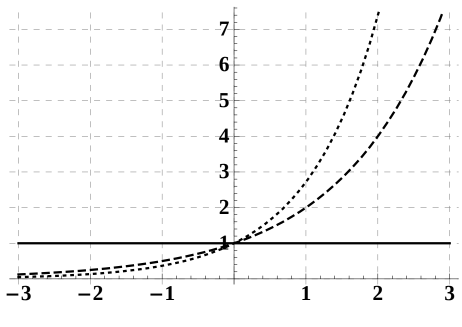


Figur 50: Början av grafen av $f_1(x) = x^{-\frac{1}{5}}$, $f_2(x) = x^5$, $f_3(x) = x^{-5}$ och $f_4(x) = x^{\frac{1}{5}}$.

Det finns en exponentialfunktion som är viktigare än alla andra nämligen den då basen ges av det tal som betecknas med bokstaven e. Detta tal har (precis som t ex π) en oändlig decimalutveckling som inte är periodisk och början av denna ser ut så här:

$$(e \approx) 2.71828182845904523536028747135.$$

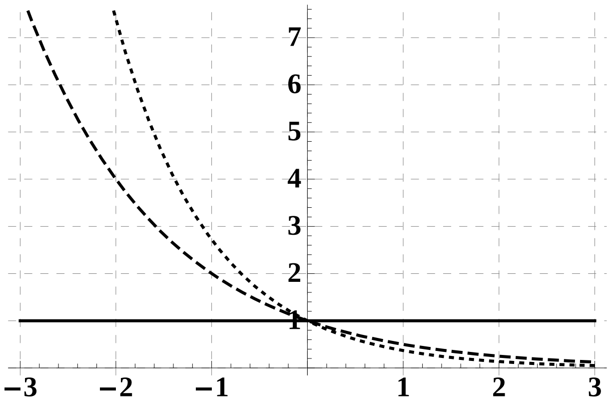
Exempel. I figur 51 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 1^x = 1$ och $f_3(x) = e^x$. Vi observerar som vi redan påpekat att kurvorna skär varandra i punkten $(0,1)$. När basen är 1 så blir (förstås) funktionen konstant hela tiden. Med basen 2 eller e så växer funktionen mot ∞ när x går mot ∞ och går mot 0 när x går mot $-\infty$. Detta gäller allmänt när basen är större än 1. (Om man multiplicerar två tal båda större än 1 så får man en produkt som är större än båda faktorerna.) I detta fall blir alltså funktionen strängt växande. □



Figur 51: Centrala delen av graferna av $f_1(x) = 2^x$ (streckad), $f_2(x) = 1^x = 1$ (heldragen) och $f_3(x) = e^x$ (prickad).

Exempel. I figur 52 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = (1/2)^x$, $f_2(x) = 1^x = 1$ och $f_3(x) = (1/e)^x$. Återigen observerar vi att kurvorna skär varandra i punkten

$(0,1)$. Med basen $1/2$ eller $1/e$ så avtar funktionen mot 0 när x går mot ∞ och går mot ∞ när x går mot $-\infty$. Detta gäller allmänt när basen är mindre än 1. (Om man multiplicerar två tal båda mindre än 1 så får man en produkt som är mindre än båda faktorerna.) I detta fall blir alltså funktionen strängt avtagande. $\square$



Figur 52: Centrala delen av graferna av $f_1(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$ (streckad), $f_2(x) = 1^x = 1$ (heldragen) och $f_3(x) = (1/e)^x = e^{-x}$ (prickad).

Observera att graferna i figur 52 är spegelbilder i y-axeln till de i figur 51. Detta förklaras av att $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ (respektive $\frac{1}{e} = e^{-1}$), så $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ (respektive $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$) för alla reella tal x.

Anmärkning. Vi har tidigare bara definierat potensen b^x om x är ett rationellt tal, men det går bra att utvidga denna också till alla reella tal. Man gör detta genom att betrakta b^{r_n}, där r_n är rationella tal som bättre och bättre approximerar ett reellt tal x. Om man t ex låter r_n vara approximationen av x med n decimaler (detta är rationella tal) så är b^x gränsvärdet av b^{r_n} då n går mot oändligheten. Mer om detta kommer i del 2 av kursen.

Vi sammanfattar våra

observationer angående exponentialfunktionen $f(x) = b^x$:

- Basen b måste vara positiv
- Definitionsmängd är $\mathbb{R}$
- Värdemängd är $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (om $b \neq 1$)
- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$
- Om $b > 1$ så är $f(x)$ strängt växande
- Om $0 < b < 1$ så är $f(x)$ strängt avtagande
- Om $b = 1$ så är $f(x) = 1$, för alla $x \in \mathbb{R}$.

4.6.2 Logaritmfunktioner

Eftersom en exponentialfunktion $f(x) = b^x$ (med $b \neq 1$ och $b > 0$) antingen är strängt växande ($b > 1$) eller strängt avtagande ($0 < b < 1$) så betyder det att dessa har en invers funktion (se avsnitt 4.1.5). Inversen till en exponentialfunktion kallas för en *logaritmfunktion*. Värdemängden för en exponetialfunktion (med $b \neq 1$) är alla positiva reella tal, så definitionsmängden för en logaritmfunktion blir alltså alla positiva reella tal.

Låt $y = f(x) = b^x$. Från definitionen av invers funktion får vi att $f^{-1}(y) = x$ där $y = f(x) = b^x$. För en allmän bas b betecknar man denna funktion med $f^{-1} = \log_b$. Vi får alltså att

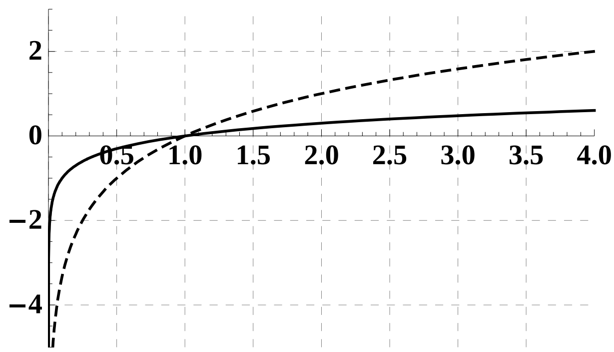
$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \log_b(y) = x,\ \text{där } x \text{ är det tal som uppfyller } y = b^x.$$

I allmänhet finns det inget enkelt sätt att för hand räkna ut värdet av en logaritmfunktion. Det finns dock ett värde som alltid är enkelt att räkna ut:

$$\log_b(1) = \log_b(b^0) = 0.$$

I figur 53 finns början av graferna av $\log_2$ och $\log_{10}$.

Exempel. Vi testar att räkna ut logaritmen med bas 2 i några enkla exempel då det går att räkna ut den exakt. I det fallet har vi att $\log_2(y) = x$ om $y = 2^x$. Det gäller alltså att



Figur 53: Början av graferna av $\log_{10}(x)$ (heldragen) och $\log_2(x)$ (streckad).

skriva argumentet som en potens av 2.

$$\begin{aligned}
\log_2(1) &= \log_2(2^0) = 0 \\
\log_2(2) &= \log_2(2^1) = 1 \\
\log_2(1024) &= \log_2(2^{10}) = 10 \\
\log_2(\sqrt{2}) &= \log_2(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Däremot finns det inget enkelt sätt att t ex räkna ut $\log_2(3)$ eftersom 3 inte är någon enkel potens av 2. □

Det finns två logaritmfunktioner som är så vanliga att de fått egna beteckningar. Det är dels den *naturliga logaritmen* som har basen e och dels 10-logaritmen som har 10 som bas. Dessa betecknas i regel med (det finns exempel i litteraturen med andra beteckningar)

$$\log_e(x) = \ln(x) \qquad \text{respektive} \qquad \log_{10}(x) = \lg(x).$$

Exempel. För dessa speciella logaritmfunktioner har vi t ex

$$\begin{aligned}
\lg(10) &= \lg(10^1) = 1 \\
\lg(0.01) &= \lg(10^{-2}) = -2 \\
\ln(e) &= \ln(e^1) = 1.
\end{aligned}$$

Här bestämde vi återigen logaritmfunktionens värde genom att skriva argumentet som en potens av basen. □

Anmärkning. Det är en allmänt vedertagen konvention att inte skriva ut parentesen för argumentet för en logaritmfunktion. Man skriver alltså bara $\ln x$ istället för $\ln(x)$ etc och hädanefter kommer vi att göra så överallt där det inte kan leda till missförstånd.

Det finns ju som bekant ett antal användbara regler för potenser. Dessa leder i sin tur till några nyttiga räkneregler för logaritmer. Vi vet ju att $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$. Detta kan vi utnyttja för att visa en räkneregel för $\log_b xy$. Om vi antar att $x > 0$ och $y > 0$ så får vi

$$b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y} = x \cdot y = b^{\log_b xy}.$$

Eftersom b^x är injektiv (den är antingen strängt växande eller strängt avtagande) så är $b^s = b^t$ bara om $s = t$. Därmed måste det gälla att

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y.$$

På samma sätt får vi genom att utnyttja att $b^{xy} = (b^x)^y$ att

$$b^{-\log_b x} = b^{(\log_b x)(-1)} = \left(b^{\log_b x}\right)^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x} = b^{\log_b \frac{1}{x}}.$$

Precis som ovan får vi att

$$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x.$$

Genom att sätta samman respektive upprepa dessa två regler så kan man få regler för logaritmen av kvot respektive potens. Vi sammanfattar de regler för logaritmfunktioner som vi kommit fram till.

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ om $x, y > 0$
- $\log_b \frac{1}{y} = -\log_b y$
- $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ om $x, y > 0$
- $\log_b x^n = n \log_b x$ om $x > 0$

Observera att det **inte** finns några regler för $\log_b(x+y)$ eller $\log_b(x-y)$.

Exempel. Förenkla uttrycket $\lg 700 - \lg \frac{7}{10}$ så långt det går.

Lösning. Vi utnyttjar reglerna för logaritm av produkt och kvot och får

$$\begin{aligned} \lg 700 - \lg \frac{7}{10} &= \lg(7 \cdot 100) - (\lg 7 - \lg 10) \\ &= \lg 7 + \lg 100 - \lg 7 + \lg 10 = \lg 10^2 + \lg 10^1 = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Ingen av de två termerna kan beräknas exakt, men som synes kunde vi beräkna differensen. □

4.6.3 Övningar

4.6.1 Vilka av följande räkneregler gäller för en exponentialfunktion $f(x) = b^x$?
I de fall som det inte är en giltig regel så ge ett exempel då det inte stämmer.

a) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ b) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

c) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ d) $f(x-y) = f(x) - f(y)$

e) $f(x-y) = f(x)/f(y)$ f) $f(x/y) = f(x)/f(y)$

4.6.2 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a) $\lg 1000$ b) $\lg 0,01$ c) $10^{\lg 4}$

d) $10^{\lg 0.7}$ e) $10^{-\lg 4}$ f) $10^{-\lg 0.5}$

4.6.3 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a) $\ln e^2$ b) $\ln \sqrt{e}$ c) $\ln \frac{1}{e}$

d) $\ln \left(\frac{1}{e}\right)^2$ e) $e^{\ln 7}$ f) $e^{-\ln 3}$

4.6.4 Lös ekvationerna.

a) $\ln x = 0$ b) $\lg x = 1$ c) $\ln x = 2$

d) $\lg x = -4$ e) $2 \cdot \lg x = 3$

4.6.5 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a) $\lg 30 - \lg 0.3$ b) $2\ln 8 - 3\ln 4 + 20\ln 1$

c) $3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln \sqrt{6}$

4.7 Trigonometriska funktioner

4.7.1 Trigonometriska funktioner

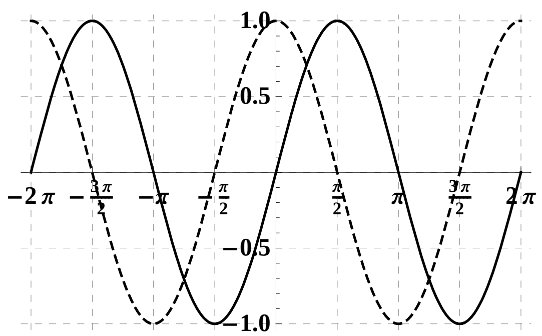
Vi har redan definierat de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus etc med hjälp av trianglar och enhetscirkeln. Trigonometriska funktioner används dock till flera olika saker och kopplingen till geometri är inte alltid helt uppenbar. T ex kommer de till stor användning vid modellering av vågrörelser som ljusvågor och ljudvågor. Det är därför viktigt att känna till de grundläggande egenskaperna som dessa har om man ser dem som reella funktioner.

Vi påminner om att vi definierade funktionerna för alla reella tal med hjälp av enhetscirkeln. Undantag var att tangens och cotangens inte var definierade då cosinus respektive sinus var 0. Sinus och cosinus ger värden vars belopp är högst 1 medan tangens och cotangens kan ge alla möjliga reella tal. Vi har alltså följande reella funktioner:

$$\begin{aligned}
\sin &: \mathbb{R} \to [-1,1] \\
\cos &: \mathbb{R} \to [-1,1] \\
\tan &: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \text{ ett heltal}\} \to \mathbb{R} \\
\cot &: \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \text{ ett heltal}\} \to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Här betyder $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \text{ ett heltal}\}$ alla reella tal utom de som är på formen $k\pi$ med k ett heltal. Observera att vi angivit respektive funktions värdemängd som målmängd. Man skulle lika gärna kunnat ange alla de reella talen som målmängd också för sinus och cosinus.

När vi utgick ifrån enhetscirkeln så tänkte vi oss att en punkt på cirkeln kan representeras av (oändligt många) olika vinklar som skiljer sig åt av ett helt antal varv, d v s en multipel av 2π radianer. T ex så representerar vinklarna $\pi/2$, $\pi/2+2\pi$ och $\pi/2-2\pi$ alla punkten $(0,1)$. Detta betyder att funktionerna blir *periodiska* med perioden 2π, d v s att $f(x+2\pi) = f(x)$. I figur 54 finns grafen till sinus- och cosinusfunktionen och man ser tydligt det periodiska beteendet. Vi såg också i enhetscirkeln att det fanns andra likheter för olika värden på vinkeln. För sinus hade vi t ex att $\sin(\pi - x) = \sin x$ och att $\sin(-x) = -\sin x$, d v s att sinus är en udda funktion.

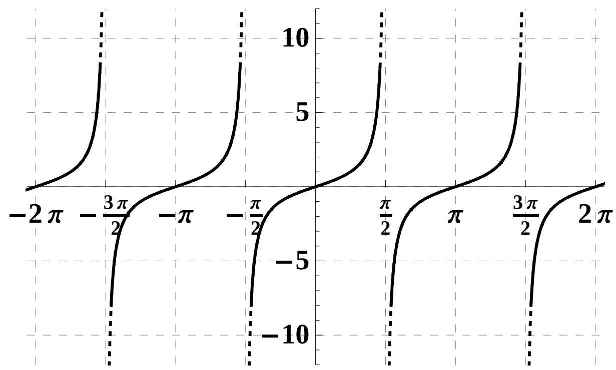


Figur 54: Delar av grafen till $\sin x$ (heldragen) och $\cos x$ (streckad).

Vi sammanfattar några av de viktigaste egenskaperna för de trigonometriska funktionerna i följande tabell.

$\sin(x+2\pi) = \sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$ (udda)	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(x+2\pi) = \cos x$	$\cos(-x) = \cos x$ (jämn)	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\tan(x+\pi) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$ (udda)	$\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
$\cot(x+\pi) = \cot x$	$\cot(-x) = -\cot x$ (udda)	$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Du ska kunna tolka dessa likheter geometriskt, dels i enhetscirkeln och dels på funktionsgrafen. Observera speciellt att perioden för tangens och cotangens är π vilket man kan skönja i figur 55.



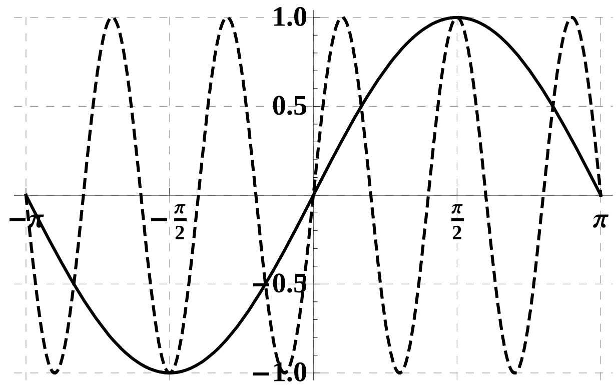
Figur 55: Delar av grafen till $\tan x$.

En viktig sak att tänka på är att när man sätter samman en trigonometrisk funktion med en annan funktion så ändras bl a perioden.

Exempel. I figur 56 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = \sin x$ och $f_2(x) = \sin(5x)$. Vi observerar att f_2 svänger mycket snabbare. Vi får att

$$f_2(x) = \sin(5x) = \sin(5x+2\pi) = \sin(5(x+\frac{2\pi}{5})) = f_2(x+\frac{2\pi}{5}),$$

så perioden för denna blir $\frac{2\pi}{5}$. Allmänt så kan vi på samma sätt visa att $\sin kx$ har perioden $\frac{2\pi}{k}$. $\square$



Figur 56: Delar av grafen av $f_1(x) = \sin x$ (heldragen) och $f_2(x) = \sin 5x$ (streckad).

4.7.2 Inversa trigonometriska funktioner

De trigonometriska funktionerna är ju praktexempel på funktioner som **inte** är injektiva, då de ju antar samma värden oändligt många gånger (se avsnitt 4.1). Därmed har de ju inga inverser. Vad man kan göra är samma trick som vi använde t ex då vi observerade att kvadratroten var invers till funktionen $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ med $f(x) = x^2$. Vi minskar definitionsmängden så att funktionen blir injektiv på detta mindre intervall.

Exempel. I figur 54 ser vi att sinusfunktionen har ett minimum i $-\pi/2$ ($\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$) och är strängt växande till $\pi/2$ ($\sin\frac{\pi}{2} = 1$). (Detta inser man också om man tittar på definitionen av sinus i enhetscirkeln.) Eftersom sinusfunktionen är kontinuerlig betyder det att den antar varje värde mellan -1 och 1 precis en gång när x ligger i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Om man alltså definierar en funktion

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1], \text{ med } f(x) = \sin x,$$

så kommer den att vara strängt växande med $[-1,1]$ som värdemängd. Alltså har den en invers

$$f^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ med } f^{-1}(y) = x \text{ där } y = \sin x.$$

Med andra ord så svarar denna inversa funktion $f^{-1}(y)$ på frågan: Vilken vinkel x i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ har $\sin x = y$?

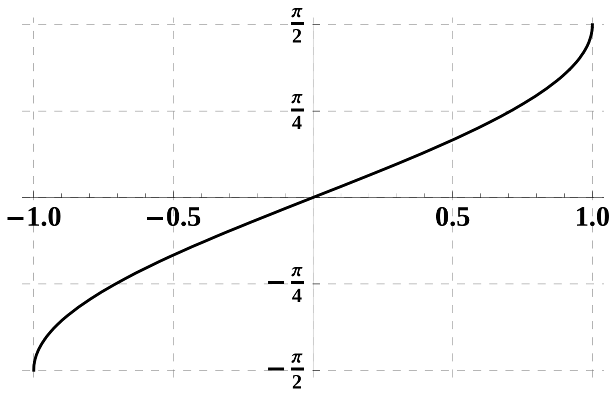
Vi har t ex att $f^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$, eftersom $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (och $\frac{\pi}{4}$ ligger i rätt intervall). □

Motsvarande konstruktion som vi gjorde för sinusfunktionen i exemplet kan man göra för samtliga trigonometriska funktioner genom att välja lämpliga intervall. Funktionerna man får kallas för de inversa trigonometriska funktionerna och heter *arcus sinus*, *arcus cosinus* etc. Ordet *arcus* betyder båge, och funktionerna anger båglängden (d v s vinkeln mätt i radianer) som motsvarar värdet av sinusfunktionen (respektive cosinus etc). Vi sammanfattar i följande tabell:

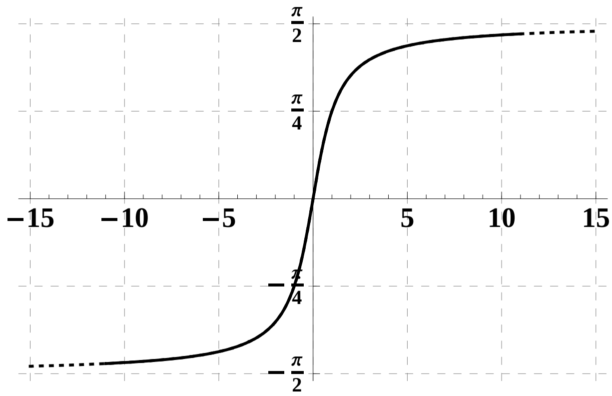
- Sinus på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ har invers $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Cosinus på $[0,\pi]$ har invers $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$
- Tangens på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ har invers $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- Cotangens på $(0,\pi)$ har invers $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$

Observera att det på minräknare ofta står $\sin^{-1}$ istället för arcsin etc.

I figur 57 finns grafen till arcus sinus och i figur 58 finns centrala delen av grafen till arcus tangens.



Figur 57: Grafen av $\arcsin x$.



Figur 58: Centrala delen av grafen av $\arctan x$.

4.7.3 Övningar Efter dessa är det lämpligt att göra prov 4c

4.7.1 Vilka av följande funktioner är jämna, udda eller inget av dem.

a) $f(x) = \sin(2x)$ b) $f(x) = \sin(x^2)$ c) $f(x) = (\sin x)^2$

d) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ f) $f(x) = \sin x + \cos x$

4.7.2 Antag att vi vet att $\sin \frac{\pi}{7} = c$. Ange följande trigonometriska funktionsvärden uttryckta med hjälp av c.

a) $\sin \frac{6\pi}{7}$ b) $\sin \frac{-\pi}{7}$ c) $\sin \frac{29\pi}{7}$

d) $\cos \frac{\pi}{7}$ e) $\tan \frac{\pi}{7}$ f) $\tan \frac{8\pi}{7}$

4.7.3 Beräkna följande värden för de inversa trigonometriska funktionerna. Var noga med att välja vinkel i rätt intervall för de olika funktionerna.

a) $\arcsin 1$ b) $\arccos 1$ c) $\arctan 1$

d) $\arcsin \frac{1}{2}$ e) $\arccos \frac{1}{2}$ f) $\arcsin(-\frac{1}{2})$

Facit

1.1.1 (a) 378 rest 18 (b) 357 (c) 7497 är delbart med 21

1.1.2 (a) 319
(b) $^{-}564$

1.1.3 (a) $a+2\cdot a\cdot b$
(b) $2\cdot a\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot b\cdot b-2\cdot a\cdot a-2\cdot a\cdot b=2a^2b+2ab^2-2a^2-2ab$

1.2.1 (a) $\frac{1}{8}$ (b) $^{-}\frac{281}{28}$ (c) $^{-}\frac{196}{33}$ (d) $\frac{17}{20}$ (e) $\frac{251}{24}$ (f) $\frac{344}{255}$

1.2.2 (a) $\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$ (b) $^{-}\frac{11}{420}$

1.2.3 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{34}$ (c) $\frac{39}{22}$ (d) 24
(e) $\frac{38}{15}$ (f) $\frac{10}{57}$ (g) $\frac{273}{128}$ (h) $\frac{11011}{1536}$

1.2.4 (a) $^{-}2$ (b) $\frac{253}{340}$ (c) $^{-}\frac{1349}{1968}$

1.3.1 (a) 25 (b) 32 (c) 81 (d) $^{-}64$
(e) 1 (f) 100 (g) 1 (h) 1

1.3.2 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $^{-}\frac{1}{27}$ (c) 1

1.3.3 (a) 2^{-6} (b) 2^2 (c) 2^{-4}

1.3.4 (a) $\frac{4}{21}$ (b) $^{-}72$

1.4.1 (a) Ja.
(b) Ja. Motsatsen $2>3$ är ju falskt.
(c) Nej.

1.4.2
1. $c-a=(c-b)+(b-a)>0$
2. Exemplet
3. $(b+d)-(a+c)=(d-c)+(b-a)>0$
4. $b\cdot c-a\cdot c=(b-a)\cdot c>0$
5. $a\cdot c-b\cdot c=(a-b)\cdot c={}^{-}(b-a)\cdot c=(b-a)\cdot{}^{-}c>0$

1.4.3 T.ex. $3<4$ och $2<6$ men $(3-2)<(4-6)$ gäller inte.

1.5.1	(a) 7	(b) 7	(c) 0	
1.5.2	(a) $^{-}2$ och 0	(b) $^{-}4.5$ och 10.5	(c) $^{-}4$	(d) $^{-}1$ och 4
	(e) Inget tal satisfierar ekvationen			
1.5.3	(a) $-1 \leq x \leq 3$		(b) $^{-}8 < x < 2$	
	(c) $^{-}1 \leq x < 0$ eller $4 < x \leq 5$		(d) $x = {}^{-}2$	
1.6.1	(a) 0.7	(b) 300	(c) $15\sqrt{2}$	(d) $\sqrt{2}/5$
	(e) $\sqrt{3}$	(f) $10 - \sqrt{2}$		
1.6.2	(a) ± 5	(b) $\pm\sqrt{5}$	(c) $\pm\frac{2}{3}$	(d) $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$
	(e) 0			
1.6.3	(a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$	(b) $\frac{\sqrt{21}}{7}$	(c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$	(d) $\sqrt{11} + 3$
	(e) $^{-}(2 + \sqrt{5})$	(f) $3 - 2\sqrt{2}$		
1.7.1	(a) $\sqrt[3]{3}$	(b) $\sqrt{2}$	(c) $^{-}2\sqrt[3]{3}$	(d) $\sqrt[12]{3}$
	(e) $\sqrt[10]{2}$	(f) $\sqrt[8]{5}$	(g) $\sqrt[3]{4}$	(h) $2\sqrt[3]{3}$
1.7.2	(a) $\pm\sqrt{2}$	(b) 3	(c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	(d) $^{-}2$
	(e) Ingen reell rot			
1.7.3	(a) $3a$	(b) $\sqrt[4]{x}$	(c) $\sqrt[15]{x}$	(d) $\sqrt{\lvert a \rvert}$
	(e) $\sqrt[12]{a^5}$	(f) $\sqrt[4]{x^3}$		
1.8.1	(a) 3	(b) $\frac{1}{2}$	(c) 2	(d) $\frac{1}{2}$
	(e) 9	(f) $\frac{1}{9}$	(g) 5	
1.8.2	(a) $3^{\frac{1}{3}}$	(b) $2^{\frac{1}{2}}$	(c) $^{-}2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$	(d) $3^{\frac{1}{12}}$
	(e) $2^{\frac{1}{10}}$	(f) $5^{\frac{1}{8}}$	(g) $2^{\frac{2}{3}}$	(h) $2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

1.8.3 (a) $3a$ (b) $x^{\frac{1}{4}}$ (c) $x^{\frac{1}{15}}$ (d) $a^{\frac{1}{2}}$

(e) $a^{\frac{5}{12}}$ (f) $x^{\frac{3}{4}}$

1.9.1 (a) $9t-u-9v$ (b) $2a+12c+73x$

1.9.2 (a) $p+r$ (b) $3b+2c$ (c) $4a-2c$

1.9.3 (a) $20x^2z^8$ (b) $^{-}27a^4b^5c^4$ (c) $14p^3q^9r^4s^2$

1.9.4 (a) $27x^6y^3$ (b) $^{-}128a^8b^7c^6$ (c) $a^{4p}b^{7p}$

1.9.5 (a) $2x^2+3xy-2y^2$ (b) $2x^3+x^2y-5xy^2+2y^3$

(c) a^5+x^5 (d) $^{-}2x^4 + x^3 + 2x^2 - 13x+6$

1.9.6 (a) $9a^2-24ab+16b^2$ (b) $a^6+4a^3b^2+4b^4$ (c) $2m^8+32$

1.9.7 (a) $36-x^2$ (b) a^4-y^2 (c) $x^{12}-81$

1.9.8 (a) $y^3+9y^2x+27yx^2+27x^3$ (b) $27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$

(c) $x^{12}-18x^9+108x^6-216x^3$

1.9.9 (a) $(x-a^2)(x+a^2)$ (b) $x^2(3x+5)(3x-5)$

(c) $(x+9)^2$ (d) $x^2y(x-2y)^2$

(e) $x(x-1)(x^2+x+1)$ (f) $3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$

(g) $^{-}x^2(x^2+1)(x+1)(x-1)$ (h) $2x^2y(3y^2-2x)(9y^4+6y^2x+4x^2)$

1.9.10 (a) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$
(b) $1-7y+21y^2-35y^3+35y^4-21y^5+7y^6-y^7$
(c) $32x^5+80x^4a^2+80x^3a^4+40x^2a^6+10xa^8+a^{10}$
(d) $x^6y^{12}-18x^5y^{10}z+135x^4y^8z^2-540x^3y^6z^3+1215x^2y^4z^4-1458xy^2z^5+729z^6$

1.9.11 (a) $\dfrac{3a^6}{8c^2}$ (b) $\dfrac{8y}{9x}$ (c) $\dfrac{2a+y}{2a}$ (d) $3xy+5y-2x$

1.9.12 (a) $\dfrac{2}{b-a}$ (b) $\dfrac{x^2(1+2x)}{(1-2x)}$ (c) $\dfrac{^{-}1}{(x-y)^2}$

(d) $\dfrac{b^4+3}{b^4-3} = \dfrac{b^4+3}{(b-\sqrt[4]{3})(b+\sqrt[4]{3})(b^2+\sqrt{3})}$

(e) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-b}$ (f) $\dfrac{a+1}{a}$ (g) $\dfrac{x^2+4}{x^2+2x+4}$

1.9.13 (a) a^2-ab+b^2 (b) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

(c) Kan inte förkortas (d) ${}^-(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

1.9.14 (a) $x-y^2$ (b) $\dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x(x^2-x+1)}$

(c) $\dfrac{x}{y}$ (d) $\dfrac{1}{2}$

1.9.15 (a) $\dfrac{18}{x(x+3)(x-3)}$ (b) $\dfrac{2x^2-7x-2}{2x(x-4)}$

(c) $\dfrac{{}^-1}{x(x+1)(x-1)}$ (d) $\dfrac{8-2x^2-x^3}{4(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)}$

1.9.16 (a) $|c+2|$, gäller för alla reella c

(b) $\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} 1 & \text{om } c>0 \\ {}^-1 & \text{om } c<0 \end{cases}$ gäller för alla reella $c\neq 0$

(c) 1, gäller för $c>0$

(d) ${}^-c\sqrt{9-c}$, gäller för $c<9$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{c-2}}$, gäller för $c>2$

(f) $\dfrac{|c|\sqrt{c+2}}{c}=\begin{cases} \sqrt{c+2} & \text{om } c>0 \\ {}^-\sqrt{c+2} & \text{om } {}^-2\leq c<0 \end{cases}$, gäller för $c\geq {}^-2, c\neq 0$

2.1.1 (a) $x=7$ (b) $x=-\frac{3}{7}$ (c) Alla tal. (d) Inga.

2.1.2 (a) $y=3x-7$ (b) $y=\frac{2x-3}{11}$

2.2.1 (a) 1 och -4 (b) -1 och 3 (c) -1 och $\frac{3}{2}$

(d) 0 och $-\frac{3}{7}$ (e) $\frac{3}{2}$ (f) $-\frac{3+\sqrt{29}}{10}$ och $-\frac{3-\sqrt{29}}{10}$

2.2.2 (a) $(x+2)^2-3$ (b) $(2x-9)^2+19$ (c) $39-(x+6)^2$

2.2.3 (a) $(x-2)(x-3)$ (b) $-2(x-1)(x+4)$

(c) $(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})$ (d) x^2+x+1

2.2.4 (a) $x^2+3x-10=0$ (b) $6x^2-x-2=0$

(c) $x^2-2x-4=0$

2.3.1 (a) 1 och -4 (b) $6+3\sqrt{3}$ och $6-3\sqrt{3}$

(c) Ingen reell rot

2.3.2 (a) 9 (b) 2 (c) Ingen rot (d) 2 (e) 4

(f) 12 (g) 3 (h) $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ (i) 6

2.3.3 (a) 2, -2, $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$ (b) 5, -5, 7 och -7 (c) 2 och -2

(d) $\sqrt{6}$ och $-\sqrt{6}$ (e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ och $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

2.3.4 (a) 9 (b) $19-6\sqrt{10}$ (c) 1 och 4

2.4.1 (a) $x=3{,}5,\ y=1$ (b) $x=4,\ y=1$ (c) $x=-2,\ y=2$

(d) saknar lösning

(e) oändligt många lösningar, av formen: $x=t,\ y=3-5t$ för alla reella t

(f) $s=3,\ t=1$ (g) $x=2,\ y=3$ (h) $x=3,\ y=5,\ z=2$

(i) $x=10,\ y=-0{,}04,\ z=0{,}06$ (j) $a=-1,\ b=1,\ c=2$

(k) $x=1,\ y=-2,\ z=3$

2.4.2 Han var 48 år.

2.5.1 (a) $\frac{x-1}{x+4}$ (b) $\frac{x+2}{x^2+2x-3}$

2.5.2 (a) $\{0, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$ (b) $\{-2, 1, 3\}$

(c) $\{-2, \frac{-5-\sqrt{21}}{2}, \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\}$ (d) $\{2\}$

2.5.3 (a) 1 är en trippelrot (b) 1 (enkelrot)

(c) 1 och -1 är trippelrötter

2.5.4 (a) $(x+2)(x-1)(x-3)$ (b) $(x+2)(x+\frac{5+\sqrt{21}}{2})(x+\frac{5-\sqrt{21}}{2})$

(c) $(x-2)(-3+x-x^2)$

3.1.1 (a) $180^\circ,\ \pi$ (b) $45^\circ,\ \pi/4$ (c) $120^\circ,\ 2\pi/3$ (d) $60^\circ,\ \pi/3$

(e) $270^\circ,\ 3\pi/2$ (f) $420^\circ,\ 7\pi/3$

3.1.2 (a) $\pi/2$ (b) $\pi/6$ (c) $\pi/4$ (d) $3\pi/2$

(e) $\pi/10$ (f) $5\pi/6$ (g) $11\pi/18$

3.1.3 (a) 540° (b) 90° (c) 135° (d) 75°

3.1.4 (a) $2\pi/3$ (b) $25\pi/6$ (c) $20\pi/9$

3.1.5 (a) 120° (b) 108° (c) $(1-\frac{2}{n})\cdot 180^\circ$

3.2.1 (a) $1/2$ (b) $1/2$ (c) $1/4$ (d) $2-\sqrt{3}$

3.2.2 (a) $B=55^\circ,\ a\approx 2,3,\ b\approx 3,3$
(b) $B=3\pi/10=54^\circ,\ b=4,1,\ c\approx 5,1$
(c) $b\approx 2,2,\ A\approx 41,8^\circ,\ B\approx 48,2^\circ$
(d) $c\approx 3,6,\ A\approx 33,7^\circ,\ B\approx 56,3^\circ$
(e) $A=35^\circ,\ a\approx 3,5,\ c\approx 6,1$

3.2.3 (a) $\cos v=4/5,\ \tan v=3/4$
(b) $\cos v=\sqrt{5}/3,\ \tan v=2/\sqrt{5}$
(c) $\sin v=2\sqrt{2}/3,\ \tan v=2\sqrt{2}$
(d) $\sin v=\sqrt{21}/5,\ \tan v=\sqrt{21}/2$
(e) $\sin v=1/\sqrt{5},\ \cos v=2/\sqrt{5}$
(f) $\sin v=24/25,\ \cos v=7/25$
(g) $\sin v=10/\sqrt{149},\ \cos v=7/\sqrt{149}$

3.3.1 (a) 6 (b) $\sqrt{13}$ (c) 5 (d) 10 (e) $\sqrt{13}$

3.3.2 (a) $(0,-2)$ (b) $(0,9/2)$

3.3.3 (a) $(1+\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ eller $(1-\sqrt{3},2\sqrt{3})$
(b) $\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2},\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right)$ eller $\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2},\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$

3.3.4 (a) $3y = 2x$ (b) $2x + 3y = 7$ (c) $y = 3$ (d) $x + 2 = 0$

3.3.5 (a) $2x - y - 1 = 0$ (b) $3x + 2y = 0$

(c) $y = 0$ (d) $x + 4y - 2 = 0$

(e) $21x + 45y - 19 = 0$ (f) $7x + 2 = 0$

3.3.6 (a) $(-3, 4)$ (b) $(-6/7, 4/7)$

(c) saknar skärningspunkt (parallella linjer)

(d) sammanfallande linjer

3.3.7 Bevis

3.3.8 (a) $2x - y - 4 = 0$ (b) $3x + y - 3 = 0$ (c) $x = 0$

3.3.9 (a) $5x - 2y = 0$ (b) $3x + y + 2 = 0$ (c) $9x - 5y - 3 = 0$

(d) $4x + y = 0$

3.3.10 (a) $x^2 + y^2 = 81$ (b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$

(c) $(x + 6)^2 + y^2 = 25/4$

3.3.11 (a) $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 0$ (b) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 2 = 0$

(c) $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 63$

3.3.12 Cirkeln med medelpunkt och radie

(a) origo, $R = \sqrt{3}$ (b) $(0, 2)$, $R = 3$ (c) $(1, -3/4)$, $R = 5/4$

(d) $(-2, 1/2)$, $R = 1/2$ (e) $(1/2, -2/3)$, $R = 4/3$

3.3.13 (a) $(1, 3)$ och $(0, -2)$ (b) $(0, -2)$, tangering

(c) ingen skärningspunkt

3.3.14 (a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 2$ (b) punkterna ligger i rät linje

(c) $x^2 + y^2 - 3y - 19 = 0$

3.4.1 (a) tredje (b) andra (c) andra (d) fjärde

(e) andra (f) andra (g) första

3.4.2 (a) -1 (b) -1 (c) $\sqrt{3}/2$ (d) $\sqrt{3}/2$

(e) 0 (f) 1

3.4.3 Bevis

3.4.4 (a) $2\sqrt{2}/3$ (b) $\sqrt{21}/5$

(c) $\sqrt{5}/3$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{5}/3$ (andra kvadranten)

3.4.5 (a) $0,8$

(b) $\sqrt{21}/5$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{21}/5$ (fjärde kvadranten)

3.4.6 (a) $-1/\sqrt{15}$ (b) $-\sqrt{91}/3$

(c) $1/\sqrt{3}$ (tredje kvadranten) eller $-1/\sqrt{3}$ (fjärde kvadranten)

(d) $\sqrt{77}/2$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{77}/2$ (fjärde kvadranten)

3.4.7 (a) $\sin v = -2/\sqrt{5}$, $\cos v = -1/\sqrt{5}$

(b) $\sin v = 1/\sqrt{10}$, $\cos v = -3/\sqrt{10}$

(c) $\sin v = 5/\sqrt{26}$, $\cos v = -1/\sqrt{26}$ (andra kvadranten) eller
$\sin v = -5/\sqrt{26}$, $\cos v = 1/\sqrt{26}$ (fjärde kvadranten)

(d) $\sin v = 1/\sqrt{5}$, $\cos v = -2/\sqrt{5}$ (andra kvadranten) eller
$\sin v = -1/\sqrt{5}$, $\cos v = 2/\sqrt{5}$ (fjärde kvadranten)

3.4.8 (a) $-1/2$ (b) $\sqrt{3}/2$ (c) $-\sqrt{3}/2$ (d) -1 (e) $1/\sqrt{2}$

(f) $-1/2$ (g) $-1/2$ (h) $1/\sqrt{3}$ (i) $-1/\sqrt{2}$ (j) $-\sqrt{3}$

3.4.9 (a) $c \approx 8,5$; $B \approx 32,1^\circ$; $C \approx 89,6^\circ$

(b) $a_1 \approx 84,3$; $A_1 \approx 104,8^\circ$; $C_1 \approx 46,7^\circ$ eller
$a_2 \approx 27,3$; $A_2 \approx 18,2^\circ$; $C_2 \approx 133,3^\circ$

(c) $b_1 \approx 21,7$; $A_1 \approx 44,8^\circ$; $B_1 \approx 104,0^\circ$ eller
$b_2 \approx 5,25$; $A_2 \approx 135,2^\circ$; $B_2 \approx 13,6^\circ$

(d) orimligt

3.4.10 (a) $c \approx 12,0$; $A \approx 115,3^\circ$; $B \approx 25,2^\circ$

(b) $a \approx 10,5$; $B \approx 19,4^\circ$; $C \approx 43,5^\circ$

(c) $b \approx 42,5$; $A \approx 148,8^\circ$; $C \approx 8,5^\circ$

3.4.11 (a) $15,2$ (b) $7,7$ (c) $4,2$

1. (a) Den är injektiv för den är en linje med riktningkoefficient $p/1000$ och alltså strängt växande.

   (b) Den är injektiv om och endast om alla Lisas vattenmeloner har olika vikt. Troligen är den det (om inte Lisa har väldigt många vattenmeloner i sitt fruktstånd) men vi vet inte säkert.

   (c) Vi har att $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ och $g \circ f(x)$ är melonen x pris i kronor, t ex om v är en melon som väger exakt 1 kilo så är

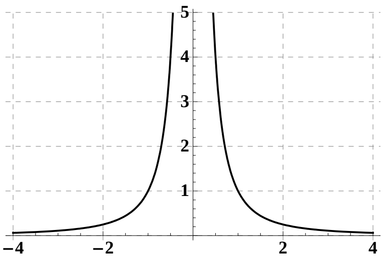
$$g \circ f(v) = g(f(v)) = g(1000) = \frac{p \cdot 1000}{1000} = p.$$

   (d) Det hänger på om f är injektiv, d v s om alla melonerna har olika vikt. Om så är fallet så är också $g \circ f$ injektiv, annars inte.

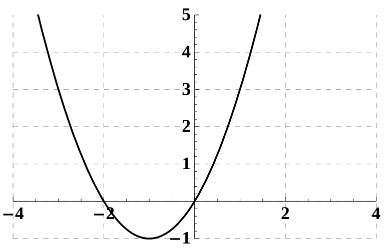
   (e) Den är inte definierad, eftersom g ger rationella tal som inte går att stoppa in i f som vill ha vattenmeloner.

2. (a) Strängt växande och därmed injektiv, udda samt har sig själv som invers. Värdemängd: $\mathbb{R}$.

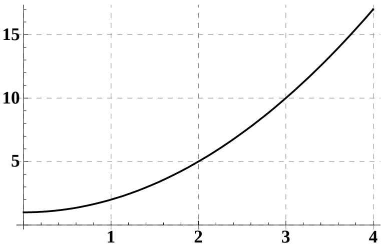
   (b) Varken växande eller avtagande, ej injektiv men jämn ty $b(-x) = 1/(-x)^2 = 1/x^2 = b(x)$ och saknar därför invers. Värdemängd: $\mathbb{R}_+$.



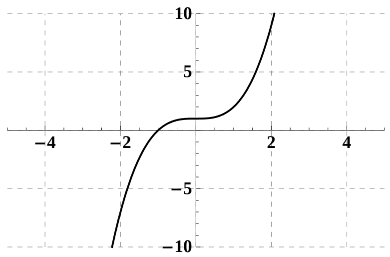
   (c) Varken växande eller avtagande, ej injektiv ty t ex $c(-2) = c(0) = 0$ så saknar invers, ej udda eller jämn (t ex $c(-2) = 0$ och $c(2) = 8$. Värdemängd: $[-1,\infty)$.



   (d) Strängt växande och därmed injektiv, varken udda eller jämn då bara definierad för icke-negativa tal. Inversen ges av $d^{-1} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ med $d^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$. Värdemängd: $[1,\infty)$.



(e) Strängt växande och därmed injektiv, varken udda eller jämn då t ex $e(-1) = 0$ och $e(1) = 2$. Inversen ges av $e^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $e^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Värdemängd: $\mathbb{R}$.



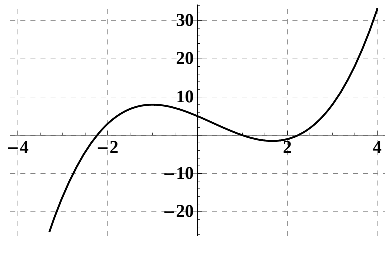
3. $$f \circ f(x) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$
$$f \circ g(x) = (\frac{1}{1+x^2})^2 - 1 = \frac{-x^2(2+x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$g \circ f(x) = \frac{1}{1+(x^2-1)^2} = \frac{1}{2-2x^2+x^4}$$
$$g \circ g(x) = \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+1} = \frac{1+2x^2+x^4}{2+2x^2+x^4}$$

4.2.1 (a) $p(x) = x^2+2x-7 = (x+1)^2-8$ ger rötterna $-1 \pm \sqrt{8} = -1 \pm 2\sqrt{2}$, minimum $p(-1) = -8$ så värdemängden är $[-8, \infty)$.

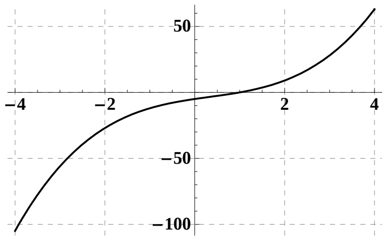
(b) $p(x) = x^2-3x+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$ ger att det saknas (reella) rötter, minimum $p(\frac{3}{2}) = \frac{15}{4}$ så värdemängden är $[\frac{15}{4}, \infty)$.

(c) $p(x) = 5-4x-x^2 = -(x+2)^2+9$ ger rötterna -5 och 1, maximum $p(-2) = 9$ så värdemängden är $(-\infty, 9]$.

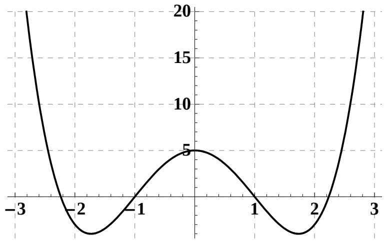
4.2.2 (a) Nollställen i $\{-\sqrt{5}, 1, \sqrt{5}\}$. Funktionen går mot $-\infty$ respektive ∞ då x går mot $-\infty$ respektive ∞.



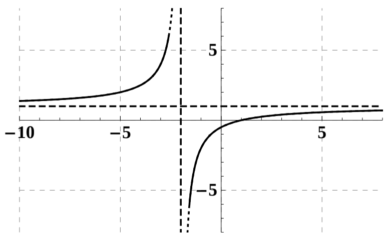
(b) Nollställe i 1. Funktionen går mot $-\infty$ respektive ∞ då x går mot $-\infty$ respektive ∞.



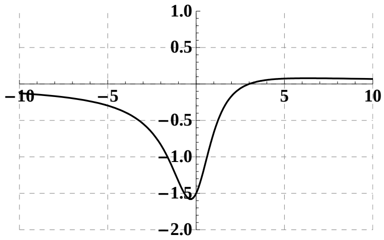
(c) Nollställe i $\{-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}\}$. Funktionen går mot ∞ då x går mot $-\infty$ eller ∞.



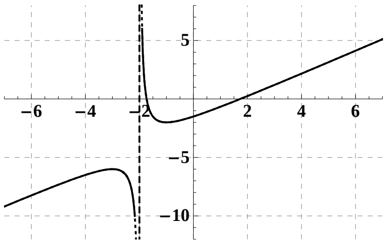
4.3.1 (a) Nollställe i 1 och funktionen är definierad för alla tal utom -2.



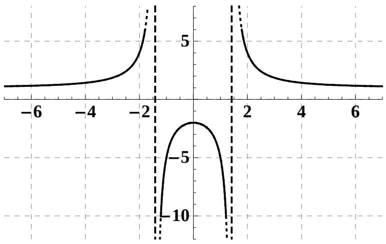
(b) Nollställe i 3 och funktionen är definierad för alla tal.



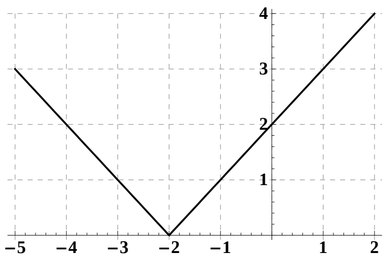
(c) Nollställen i $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ och funktionen är definierad för alla tal utom -2.



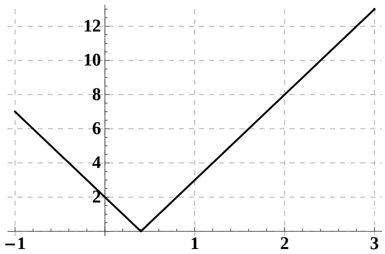
(d) (Reella) nollställen saknas och funktionen är definierad för alla tal utom $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.



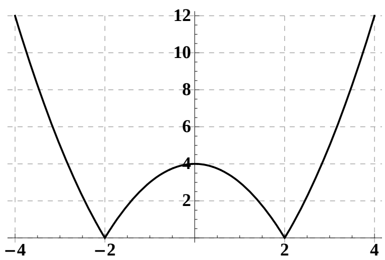
4.4.1 (a) $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{om } x \geq -2, \\ -(x+2) & \text{om } x < -2. \end{cases}$



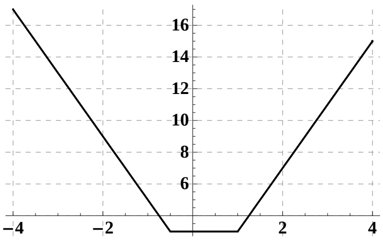
(b) $|5x-2| = \begin{cases} 5x-2 & \text{om } x \geq \frac{2}{5}, \\ -(5x-2) & \text{om } x < \frac{2}{5}. \end{cases}$



(c) $\left|x^2-4\right| = \begin{cases} x^2-4 & \text{om } x \leq -2 \text{ och } x \geq 2, \\ -(x^2-4) & \text{om } -2 < x < 2. \end{cases}$



(d) $|2x-2|+|2x+1| = \begin{cases} (2x-2)+(2x+1) = 4x-1 & \text{om } x \geq 1, \\ -(2x-2)+(2x+1) = 3 & \text{om } -\frac{1}{2} < x < 1, \\ -(2x-2)-(2x+1) = -4x+1 & \text{om } x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$



4.5.1 $f_1(x) = x^{-\frac{1}{5}}$: Heldragen. $f_1^{-1} = f_3$. Maximal definitionsmängd: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f_2(x) = x^5$: Prickad. $f_2^{-1} = f_4$. Maximal definitionsmängd: $\mathbb{R}$
$f_3(x) = x^{-5}$: Streckad/prickad. $f_3^{-1} = f_1$. Maximal definitionsmängd: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f_4(x) = x^{\frac{1}{5}}$: Streckad. $f_4^{-1} = f_2$. Maximal definitionsmängd: $\mathbb{R}$

4.6.1 Det är bara bara a) och e) som stämmer.

4.6.2 (a) 3 (b) -2 (c) 4
(d) 0.7 (e) $\frac{1}{4}$ (f) 2

4.6.3 (a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -1
(d) -2 (e) 7 (f) $\frac{1}{3}$

4.6.4 (a) $x = 1$ (b) $x = 10$ (c) $x = e^2$
(d) $x = 0.0001$ (e) $x = 10\sqrt{10}$

4.6.5 (a) 2 (b) 0 (c) $\ln 2$

4.7.1 (a) udda (b) jämn (c) jämn
(d) jämn (e) udda (f) inget

4.7.2 (a) c (b) $-c$ (c) c

(d) $\sqrt{1-c^2}$ (e) $\dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ (f) $\dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}}$

4.7.3 (a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) $\dfrac{\pi}{4}$

(d) $\dfrac{\pi}{6}$ (e) $\dfrac{\pi}{3}$ (f) $-\dfrac{\pi}{6}$