Anonym kod	TMV122/177 Inledande Matematik Z/TD 2017-12-20	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna gränsvärdena (3 p)

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

Lösning:

(i) Vi har $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{1-1/x^2}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-1/x^2}} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|\sqrt{1-1/x^2}} = \underline{\underline{-1}}.$$

(ii) Eftersom $\sin\pi = 1-1 = 0$ ger L'Hôpitals regel

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cos(\pi x)}{1} = \underline{\underline{-\pi}}.$$

Svar: (i) -1 (ii) $-\pi$

(b) Funktionen $y = f(x)$ ges implicit av $xy + e^{x+y} = 0$. Bestäm en stationär punkt till funktionen och avgör om den är en (lokal) extrempunkt. (3 p)

Lösning:

Implicit derivering ger

$$y + xy' + (1+y')e^{x+y} = 0 \iff y' = -\frac{y+e^{x+y}}{x+e^{x+y}}$$

dvs. en stationär punkt ($y'=0$) är $(x,y) = (1,-1)$ (vilken uppfyller ekv. $xy+e^{x+y}=0$). Genom att derivera ytterligare en gång får vi

$$2y'' + 2 = 0 \text{ då } (x,y) = (1,-1) \Rightarrow y'' = -1.$$

Detta ger

Svar: $(1,-1)$ är en lokal max-punkt.

(c) Bestäm alla reella tal x, sådana att $|3x+2| < 3$. (2 p)

Lösning:

$3x+2 \geq 0 \iff x \geq -2/3$ ger

$3x+2 < 3 \iff x < 1/3$

$3x+2 < 0 \iff x < -2/3$ ger

$-(3x+2) < 3 \iff x > -5/3$

Svar: $-5/3 < x < 1/3$

(d) Bestäm alla värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + a^2 y = a, \end{cases}$$

saknar lösning.

Lösning: Ekvationssystemet är (rad)ekvivalent med

$x + 2y = 1$

$\underbrace{(a^2-4)}_{(a+2)(a-2)} y = a-2$

dvs. lösn. saknas då $a=-2$ eftersom ekv. 2 blir $0=-4$.

Svar: $a=-2$

(e) Beräkna derivatan av $\dfrac{1}{(f(x))^2+1}$ i punkten $x=4$, då $f(4)=1$ och $f'(4)=-4$.

(2 p)

Lösning: Genom att använda kedjeregeln ser vi att derivatan ges av

$$-\frac{2f'(x)f(x)}{(f(x)^2+1)^2}$$

och $x=4$ ger värdet 2.

Svar: 2

(f) $f(x) = e^{x^2}$ är inverterbar då $x > 0$. Bestäm $(f^{-1})'(e^4)$. (2 p)

Lösning: Genom att observera att $f(2)=e^4$ och använda formeln

$$(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x) \quad \text{samt} \quad f'(x) = 2x e^{x^2}$$

får vi $(f^{-1})'(e^4) = 1/f'(2) = 1/4e^4$.

Svar: $\frac{1}{4}e^{-4}$

2. a) Två sidor av triangeln ges av vektorerna

$$\overrightarrow{AB} = (1,-2,0), \quad \overrightarrow{AC} = (1,-4,-3).$$

Triangelns area är lika med arean av det parallellogram som ges av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$, dvs.

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}|(6,3,-2)|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36+9+4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$$

b) En normal $\mathbf{n}$ till planet ges av

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,3,-2)$$

eftersom denna vektor är ortogonal mot både $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Detta ger följande form för en ekv. till planet:

$$(6,-3,-2) \bullet (x,y,z) = D \qquad (D \in \mathbb{R})$$

$$\Longleftrightarrow 6x - 3y - 2z = D.$$

Sätter vi $(x,y,z) = A = (0,1,1)$ får vi

$$-3-2 = D$$

dvs. den sökta ekv. är

$$\underline{\underline{6x - 3y - 2z = -5}}$$

3. Vi har $D_f = \mathbb{R}$.

Derivatan av f ges av

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^2+1} - \frac{2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2},$$

vilket betyder att den enda kritiska punkten är $x=0$.

Vidare ges andraderivatan av

$$f''(x) = \frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3}$$

dvs. vi har potentiella inflektionspunkter i $x = \pm\sqrt{3}, 0$.

Vi har nu följande tabell:

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f'	$+$		$+$		$+$		$+$
f''	$+$		$-$		$+$		$-$
f	$\nearrow$ konvex		$\nearrow$ konkav	0	$\nearrow$ konvex		$\nearrow$ konkav

($\pm\sqrt{3}, 0$ är infl. pktr.).

Vi observerar

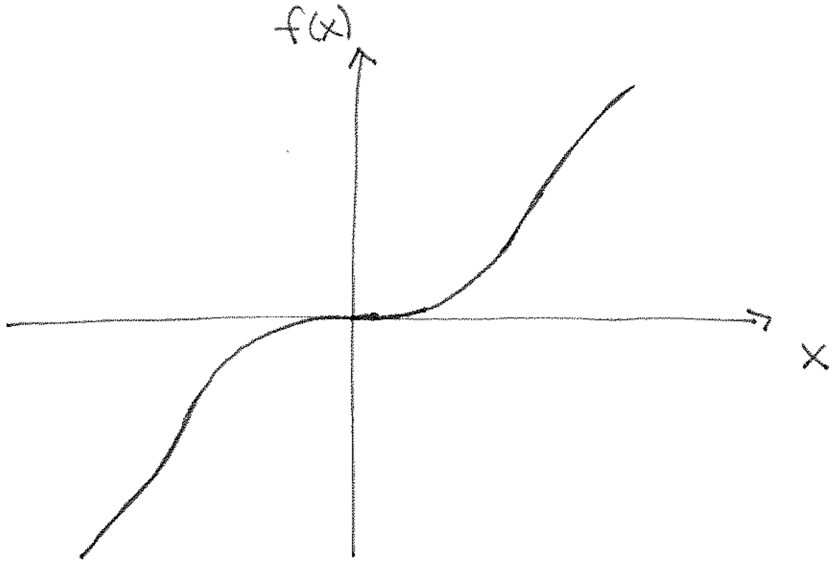
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2+1} \to 1 \quad \text{då} \quad x \to \pm\infty$$

och

$$f(x) - x \to 0 \qquad \text{— '' —}$$

vilket innebär att vi har sneda asymptoten $y = x$ då $x \to \pm\infty$.

Grafen kan nu skissas:



4. Eftersom $e^{at} > 0$ och $t^3 \leq 0$ då $t \leq 0$ kan vi begränsa oss till $t > 0$. Ekvationen är då ekvivalent med

$$at = 3\ln t \iff a = \frac{3\ln t}{t}.$$

Vi betraktar funktionen

$$f(t) = \frac{3\ln t}{t}.$$

Eftersom $\ln t \to -\infty$ och $1/t \to +\infty$ då $t \to 0^+$ har vi

$$f(t) \to -\infty \quad \text{då} \quad t \to 0^+.$$

Vidare ger L'Hôpitals regel

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{3}{t^2} = 0.$$

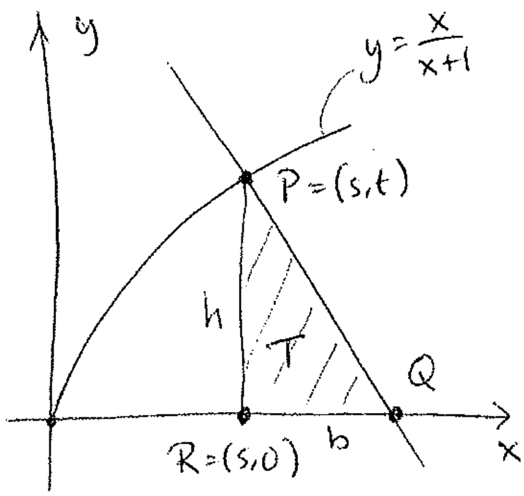
Vi observerar att

$$f'(t) = \frac{3}{t^2}(1 - \ln t)$$

och därför är $t = e$ den enda kritiska punkten. Eftersom $f'(t) \gtrless 0$ då $t \lessgtr e$ är det en max-punkt. Vi har $f(e) = 3/e$.

Sammantaget ger detta att ekvationen $e^{at} = t^3$ har en lösn. om $a = 3/e$, två lösn. om $a < 3/e$ och inga lösn. om $a > 3/e$.

5.



$$y'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_T = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$k_T \cdot k_N = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_N = -(s+1)^2$$

Normallinje: $y = -(s+1)^2(x-s) + t$

$t = \frac{s}{s+1}$: $y = -(s+1)^2(x-s) + \frac{s}{s+1}$

$y=0 \Leftrightarrow (s+1)^2(x-s) = \frac{s}{s+1} \Leftrightarrow x-s = \frac{s}{(s+1)^3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{s}{(s+1)^3} + s$

$\therefore Q = \left(\frac{s}{(s+1)^3} + s, 0\right)$

$b = \frac{s}{(s+1)^3} + \cancel{s} - \cancel{s} = \frac{s}{(s+1)^3}$.

$h = t = \frac{s}{s+1}$

$\Rightarrow \text{Area}(T) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2}\frac{s}{(s+1)^3} \cdot \frac{s}{s+1} = \frac{s^2}{2(s+1)^4} = f(s)$

Ser att: $f(s) \xrightarrow[s \to 0^+]{} 0$, $f(s) \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$. $f(s) > 0$

$\Rightarrow$ $f(s)$ har en max.pkt. på $(0, \infty)$

$$f'(s) = \frac{4s(s+1)^4 - 8s^2(s+1)^3}{4(s+1)^8} =$$

$$= \frac{\cancel{4}s(s+1)^3(s+1-2s)}{\cancel{4}(s+1)^{\cancel{8}5}} = \frac{s(1-s)}{(s+1)^5}$$

$$f'(s) = 0 \Rightarrow (s_1 = 0) \quad \underline{\underline{s_2 = 1}}$$

$$P = \left(s, \frac{s}{s+1}\right) \Rightarrow \underline{\underline{P_{max} = \left(1, \frac{1}{2}\right)}}$$

6. a) Låt $P(t)$ vara den punkt på enhetscirkeln som svarar mot en cirkelbåge av längd t mätt med $(1,0)$ som utgångspunkt. Vi definierar då

$$\cos(t) \quad \text{och} \quad \sin(t)$$

som x- resp. y-koordinaten för punkten $P(t)$.

b) Se 'Theorem 10' i 'Calculus' (Section 2.5) av Adams och Essex.

7. a) En funk. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är <u>injektiv</u> om $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

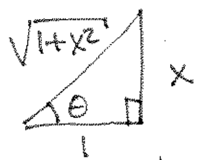
b) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras av att värdet på $f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, är det unika tal $y \in \mathbb{R}$ sådant att $f(y) = x$, dvs.

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y).$$

c) Vi har

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \sin(\arctan x)$$

$$= \left\{ \quad \theta = \arctan x \right\} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

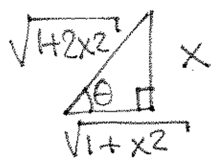


vilket ger

$$\sin\left(\arctan\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\right)\right)$$

$$= \sin\left(\arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \left\{ \quad \theta = \arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right\}$$



$$= \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$