| Anonym kod | TMV122/177 Inledande Matematik Z/TD 2018-08-29 | Poäng |
|---|---|---|
| | | |

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna gränsvärdena (3 p)

(i) $\lim_{x\to 7} \dfrac{x^7 - 7^7}{x - 7}$

(ii) $\lim_{x\to 0} x \sin \dfrac{3}{x}$

**Lösning:**

(i) Eftersom både täljare och nämnare $\to 0$ kan vi använda l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^7 - 7^7}{x - 7} = \lim_{x\to 7} \frac{7x^6}{1} = 7^7.$$

(ii) Eftersom $|\sin y| \leq 1$ för alla $y \in \mathbb{R}$, har vi

$$\left|x \sin \tfrac{3}{x}\right| = |x| \left|\sin \tfrac{3}{x}\right| \leq |x| \quad (x \neq 0)$$

$$\to 0 \text{ då } x \to 0$$

dvs. $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{3}{x} = 0.$

**Svar:** ............................................................

(b) Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom origo och är tangent till kurvan $y = x^3 + 2$. (3 p)

**Lösning:** Tangentlinjen till kurvan i punkten $x=a$ ges av

$$y = y'(a)(x-a) + y(a) = 3a^2(x-a) + a^3 + 2.$$

$y=x=0$ ger ekv.

$$-3a^3 + a^3 + 2 = 0 \Longleftrightarrow 2a^3 = 2$$

$$\Longleftrightarrow a^3 = 1$$

$$\Longrightarrow a = 1$$

**Svar:** dvs. ekv. är $y = 3(x-1) + 3 \Longleftrightarrow y = 3x$.

(c) Om $f'(1) = 1$ och $g'(1) = -1$, beräkna (2 p)

$$\left(\frac{d}{dx}(f(2\cos^2 x) - g(2\sin^2 x))\right)\bigg|_{x=\pi/4}.$$

**Lösning:** Genom att använda linjäritet och kedjeregeln får vi att derivatan ges av

$$-4\cos x \sin x \left(f'(2\cos^2 x) + g'(2\sin^2 x)\right),$$

och sätter vi $x = \pi/4$ ger $\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ det numeriska värdet

$$-4\,(1/\sqrt{2})^2\,(f'(1) + g'(1)) = 0.$$

**Svar:** ..........................................................................................

(d) Bestäm alla värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ sådana att ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + a^2 y = a, \end{cases}$$

har oändligt många lösningar.

**Lösning:** Vi har

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a^2 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right],$$

dvs. oändligt många lösn. fås om och endast om $a = 2$ (då den andra raden svarar mot den triviala ekv. $0 = 0$).

**Svar:** ..........................................................................................

(e) Bestäm värdemängden till funktionen (2 p)

$$f(x) = e^{\cos(\pi - x) + 2\cos x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

**Lösning:** $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ger

$$\cos(\pi - x) + 2\cos x = \cos x,$$

vilken har värdemängden $[-1, 1]$. Svaret blir därmed

$$[e^{-1}, e].$$

**Svar:** ..........................................................................................

(f) $h(x) = \ln(\sqrt{1 + x^3})$ är inverterbar för $x > -1$. Bestäm $(h^{-1})'(\ln 3)$. (2 p)

**Lösning:**

$(h^{-1})'(h(x)) = 1/h'(x)$ och $h(2) = \ln 3$ ger

$$(h^{-1})'(\ln 3) = 1/h'(2)$$

$$= \frac{2}{3} \quad \left(h'(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x^2}{1 + x^3}\right).$$

**Svar:** ..........................................................................................

2. a) Först bildar vi två vektorer i planet, t.ex.

$$\mathbf{v}_1 = A - B = (2,-1,-1),$$

$$\mathbf{v}_2 = C - B = (4,2,-5).$$

En normalvektor ges därmed av

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (7,6,8),$$

vilket kombinerat med, t.ex., punkten $A=(1,2,3)$ ger ekvationen

$$7x + 6y + 8z = 43.$$

$$(\mathbf{n} \cdot (x,y,z) = \mathbf{n} \cdot A)$$

b) En riktningsvektor till linjen ges av $\mathbf{r} = D - E = (4,1,1)$, vilket ger ekv.

$$\begin{cases} x = 4t+1 \\ y = t-1 \\ z = t \end{cases}.$$

Skärningen med planet fås genom att sätta in linjens komponenter i planets ekv.:

$$7(4t+1) + 6(t-1) + 8t = 43$$

$$\Longleftrightarrow t = 1 \Longrightarrow (x,y,z) = (5,0,1).$$

3. a, b Se Avsnitt 3.3 i 'Calculus'.

4. Se Exempel 8 i Avsnitt 4.6 i 'Calculus'. (Använd skalningen $x \to \sqrt{2}\,x$.)

5. Funktionen $f$ är definierad då $\ln x$ är det, dvs. i $(0,\infty)$.

Derivatan är

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

som endast har nollstället $x = e^{1/2}$.

Vi observerar att

$$f(x) \to -\infty, \qquad x \to 0^+,$$

$$f(x) \to 0, \qquad x \to \infty,$$

(eftersom $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ för alla $a>0$, vilket följer från l'Hôpitals regel).

Vi gör en teckentabell:

| $x$ | $0$ | $<$ | $e^{1/2}$ | $<$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1/2e$ | $\searrow$ | $0$ |

Värdemängden är därmed $(-\infty, 1/2e]$.

6. a, b Se Avsnitt 2.2 resp. 2.8 i 'Calculus'.

7. Total area av burken är

$$A = \underbrace{2\pi r h}_{\text{cylinder}} + \underbrace{2\pi r^2}_{\text{lock+botten}}$$

där $h$ är höjden och $r$ radien (för botten och lock).

Volymen $V = \pi r^2 h \iff h = \frac{V}{\pi r^2}$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Derivering ger

$$A' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

så att

$$A'(r) = 0 \iff \frac{2V}{r^2} = 4\pi r$$

$$\iff r^3 = \frac{V}{2\pi}$$

$$\iff r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Eftersom

$$\lim_{r \to 0^+} A(r) = \lim_{r \to \infty} A(r) = \infty$$

är detta en min-punkt.

Optimal höjd ges därmed av

$$h = V/\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}$$

$$= 2^{3/3}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

$$= 2r.$$

Genom att sätta $V = 100\ cm^3$ fås numeriska värden för $r, h$,