Anonym kod	TMV122/177 Inledande Matematik Z/TD 2016-10-27	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet, (2 p)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 5 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

Lösning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \; -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 1 - 2t \\ x_3 = t \text{ fri variabel} \end{cases}$$

Svar: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$

(b) Beräkna $f'(0)$ om $f(x) = 3\sin\Big(x + \tan(2x)\Big)$. (2 p)

Lösning:

$$f'(x) = 3\cos(x + \tan(2x)) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2\right)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 3\cos(0 + \tan(0)) \cdot \left(1 + \frac{1}{1^2} \cdot 2\right) =$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot (1 + 2) = 9$$

Svar: 9

(c) Förenkla, (2 p)

$$2\log_3(12) - \log_3(16) + \frac{1}{2}\log_3(9).$$

Lösning: $2\log_3(12) - \log_3(16) + \frac{1}{2}\log_3(9) =$

$$= \log_3((3 \cdot 4)^2) - \log_3(4^2) + \log_3(9^{1/2}) =$$

$$= \log_3\left(\frac{3^2 \cdot \cancel{4^2}}{\cancel{4^2}} \cdot 3\right) = \log_3(3^3) = 3$$

Svar: 3

(d) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^3}\right)$ är inverterbar då $x > -1$. Bestäm $(f^{-1})'(\ln 3)$. (2 p)

Lösning:

$$f(2) = \ln\left(\sqrt{1+2^3}\right) = \ln(\sqrt{9}) = \ln(3)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\ln(3)) = 2$$

$$f'(x) = \left(\tfrac{1}{2}\ln(1+x^3)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^3}\cdot 3x^2$$

$$(f^{-1})'(\ln 3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln(3)))} = \frac{1}{f'(2)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{3\cdot 2^2}{2(1+2^3)}} = \frac{2\cdot 9}{3\cdot 4} = \frac{3}{2}$$

Svar: $3/2$

(e) Beräkna gränsvärdet (2 p)

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{1/x}$$

Lösning: Låt $y = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{1/x} = (1-x^2)^{1/2x}$

$$\lim_{x\to 0}\ln(y) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln(1-x^2) \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)}{2} = 0$$

$\ln(y) \to 0$ då $x \to 0$

$\Rightarrow y \to e^0$ då $x \to 0$

$e^0 = 1$

Svar: 1

2 (a) Skriv om ℓ på skalärparametrisk form

$$\frac{1-x}{-1} = t \iff 1-x = -t \iff x = 1+t$$

$$-y = t \iff y = -t$$

$$\frac{z+1}{3} = t \iff z+1 = 3t \iff z = -1+3t$$

$$\Rightarrow \ell : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Stoppa in dessa ↑ i planets ekvation och lös för t.

$$2(1+t) + 2(-t) + (-1+3t) = 7 \iff$$

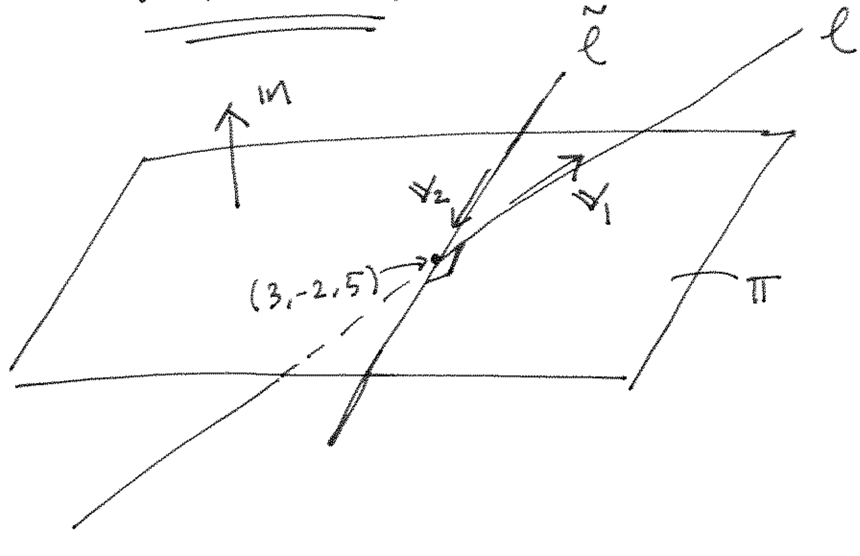
$$\iff 2 + \cancel{2t} - \cancel{2t} - 1 + 3t = 7 \iff 3t = 6 \iff t = 2$$

Skärningspunkten har koordinaterna:

$$\begin{cases} x = 1+2 = 3 \\ y = -2 \\ z = -1+6 = 5 \end{cases}$$

$\therefore \ \underline{\underline{(3,-2,5)}}$ ← skärningspkt. $\ell \cap \pi$

(b)



Vi vill ha ekvationen för $\tilde{\ell}$ så vi behöver endast $\mathbf{v}_2$

$$\left.\begin{array}{lll} \tilde{\ell} \perp \ell & \Leftrightarrow & \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \\ \tilde{\ell} \in \pi & \Leftrightarrow & \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{v}_2 \parallel \mathbf{n} \times \mathbf{v}_1$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_1$ (längden av $\mathbf{v}_2$ irrelevant!)

$\pi : 2x + 2y + z = 7 \Rightarrow \mathbf{n} = (2, 2, 1)$

$$(a) \Rightarrow \ell : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (1, -1, 3)$$

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \quad\quad - \quad\quad + \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (7, -5, -4) \end{array}$$

Vet att $(3, -2, 5) \in \tilde{\ell}$

$\Rightarrow \tilde{\ell} : \mathbf{x} = (3, -2, 5) + t(7, -5, -4), \; t \in \mathbb{R}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

Steg 1: $D_f = (0,\infty) \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

Steg 2: $f'(x) = \dfrac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$

Kritisk pkt.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Steg 3: $f''(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(\ln(x))^2 - (\ln(x)-1)\cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^4} =$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cancel{\ln(x)}\left(\ln(x) - 2(\ln(x)-1)\right)}{(\ln(x))^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{2 - \ln(x)}{x(\ln(x))^3}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2$ ev. infl. pkt.

Steg 4:

		1		e		e^2	
f'	$- - -$		$- - -$	0	$+ + +$		$+ + +$
f''	$- - -$		$+ + +$		$+ + +$	0	$- - -$
f	$\searrow \cap$	ej det.	$\searrow \cup$	e	$\nearrow \cup$	$\frac{e^2}{2}$	$\nearrow \cap$
				min. pkt.		infl. pkt.	

Steg 5: I. Lodräta asymptoter:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$$

$\Rightarrow x = 1$ lodrät asymptot.

II. <u>Vågräta asymptoter:</u>

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$$

$$\left(\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0 \right)$$

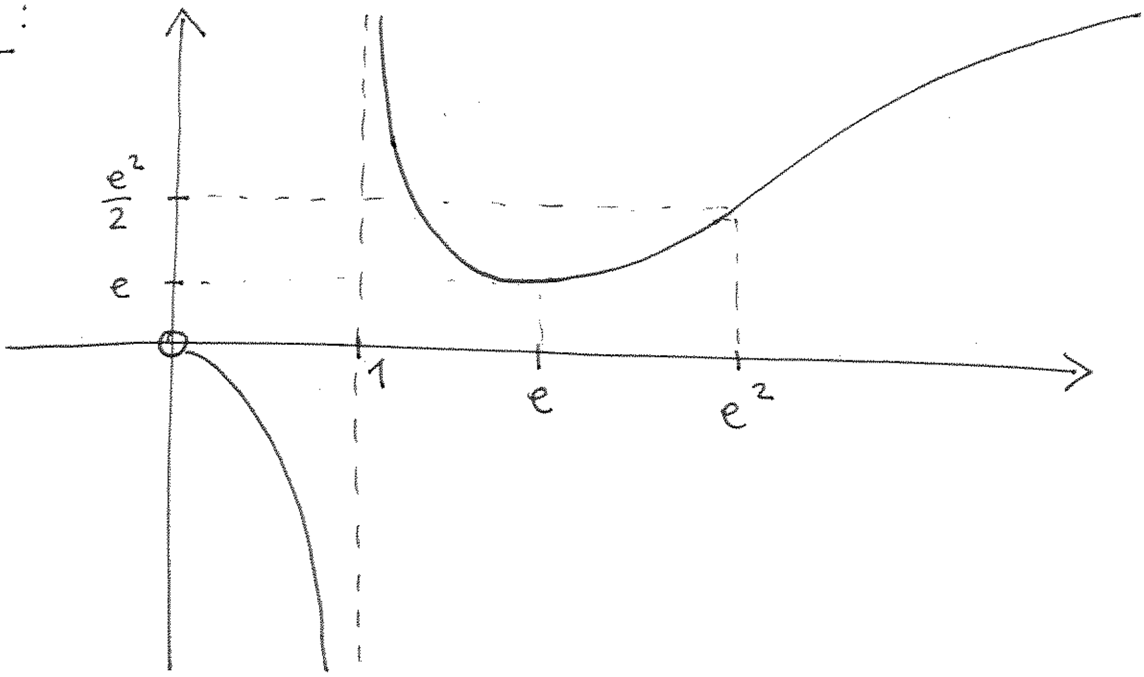
III. <u>Sneda asymptoter:</u>

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - \overset{=0}{k} \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$$

$\Rightarrow$ Ingen sned asymptot

<u>Steg 6:</u>



4. I en punkt x har tangenten till $y = \frac{1}{1+x^2}$ lutningen

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Låt $f(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Vi vill maximera $f(x)$.

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -\frac{2\cancel{(1+x^2)}(1+x^2-4x^2)}{(1+x^2)^{\cancel{4}3}} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$	
f'	+ + +	0	− − −	0	+ + +
f	↗	max.	↘	min	↗

$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ~~max~~ pkt.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2 \cdot (-1/\sqrt{3})}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \frac{4^2}{3^2}} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ lokal eller global max.?

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$\therefore$ Tangenten till $y = \frac{1}{1+x^2}$ har störst positiv lutning då $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Den maximala lutningen är $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.

$0 < r < \infty$

$0 < h < \infty$

Area cylinder: $2\pi r h$

Area botten: πr^2

Total area: $A = 2\pi r h + \pi r^2$

A funktion av r och h

Volym: $V = \pi r^2 h \iff h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ $(*)$

$$\Rightarrow A(r) = 2\pi r \cdot \frac{V}{\cancel{2}\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2V}{r} + \pi r^2$$

$$A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 2\pi r$$

$$A'(r) = 0 \iff \frac{\cancel{2}V}{r^2} = \cancel{2}\pi r \iff r^3 = \frac{V}{\pi}$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}$$

$$\lim_{r \to 0^+} A(r) = \lim_{r \to 0^+} \left(\frac{2V}{r} + \pi r^2\right) = \infty$$

$$\lim_{r \to \infty} A(r) = \lim_{r \to \infty} \left(\frac{2V}{r} + \pi r^2\right) = \infty$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3} \text{ min. pkt.}$$

Optimal h? Stoppa in i $(*)$ eller observera att:

$$\pi r^3 = V = \pi r^2 h \iff h = r$$

$$\therefore \; h = r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}$$

6. $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$, $D_f = (0, \infty)$

$f'(x) = e^{x\ln(x)}\left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$= e^{x\ln(x)}\left(\ln(x) + 1\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

		e^{-1}	
f'	$- - -$	0	$+ + +$
f	$\searrow$	min.	$\nearrow$

$f(e^{-1}) = e^{e^{-1}\ln(e^{-1})} = e^{-e^{-1}}$ lokal eller global?

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^x = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^x = ?$

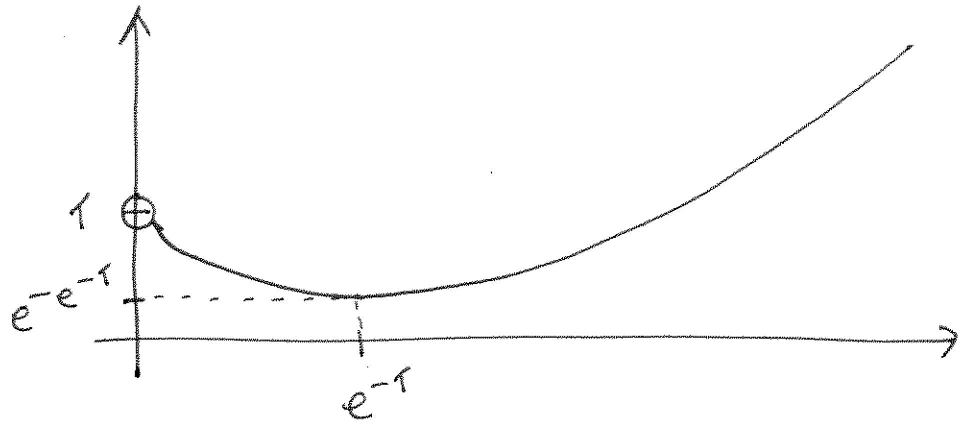
Låt $y = x^x$.

$\lim_{x \to 0^+} \ln(y) = \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

$\ln(y) \to 0$ då $x \to 0^+$

$\Rightarrow y \to e^0 = 1$ då $x \to 0^+$

$-e^{-1} < 0 \Rightarrow e^{-e^{-1}} < 1$



$$\therefore \; V_f = \left[e^{-e^{-\tau}}, \infty \right)$$

8. Vet att: f deriverbar på $\mathbb{R}$

$c \in \mathbb{R}$ sådan att $f(c) = c$

Vill visa: Om $f'(x) \neq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ så är c unik.

Detta är ekvivalent med att visa att:

Om c inte är unik så existerar något $\xi \in \mathbb{R}$ sådant att $f'(\xi) = 1$.

Vi visar

Antag att c inte är unik, dvs $\exists d \in \mathbb{R}$ sådan att $f(d) = d$, och antag att $c < d$.

Studera f på $[c, d]$:

I. f kont. och def. på $[c, d]$

II. f deriverbar på (c, d)

Medelvärdessatsen $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (c,d)$; $f'(\xi) = \dfrac{f(d) - f(c)}{d - c} =$

$$= \frac{d-c}{d-c} = 1.$$

∎