Lösningsförslag TMV122/177 Inledande Matematik Z/TD, 171026

1. (a) (i) Genom omskrivningen

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}$$

får vi ett gränsvärde av typen $[\frac{0}{0}]$. Användning av l'Hôpitals regel ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}=0.$$

(ii) Med $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ har vi

$$\ln y=2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

och användning av l'Hôpitals regel ger

$$\lim_{x\to\infty}2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}=2\lim_{x\to\infty}1+\frac{1}{x}=2.$$

Detta ger att $y\to e^2$ då $x\to\infty$ eftersom e^x är kontinuerlig i $x=2$.

(b) Radreduktion ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&1&1&0\\2&1&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&0&-1&-1\\0&-1&-3&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&3&1\\0&0&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right],$$

dvs. ekvationssystemet har den unika lösningen

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

(c) Implicit derivering ger

$$\frac{2x}{4}+2yy'=0\Leftrightarrow y'=-\frac{x}{4y},$$

vilket i punkten $(5,2)$ ger lutningen

$$y'=-\frac{5}{4\cdot 2}=-\frac{5}{8}.$$

(d) Kom ihåg att

$$\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}=|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|\cdot\cos\phi\Leftrightarrow\cos\phi=\frac{\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|},$$

vilket i detta fall ger

$$\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

och därmed att $\phi=\pi/3$.

(e) Vi observerar att

$$T'(x)=1+\frac{1}{2}\cos(x/2)>0,\quad\forall x\in\mathbb{R},$$

eftersom $\cos(x/2)\geq -1$. Detta medför att T är en strängt växande funktion och därmed injektiv vilket är precis det som krävs för att T ska vara inverterbar.

(f) Kedjeregeln ger att

$$g'(t) = \cos(\arccos(t/2)) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2/4}}\right).$$

Genom att välja $t = 1$ får vi

$$g'(1) = -\cos(\arccos(1/2)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-1/4}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. (a) Planet $x + y + z = 0$ har en normal $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ och linjen som går genom punkterna $P = (1, 0, -1)$ och $Q = (1, -2, 1)$ har en riktningsvektor $\mathbf{v} = PQ = (0, 2, -2)$. En normal $\mathbf{n}_\Pi$ till planet Π är alltså ortogonal mot både $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ och vi kan välja

$$\mathbf{n}_\Pi = \mathbf{n} \times \mathbf{v} = (-4, 2, 2).$$

Detta ger att Π har en ekvation av formen $-4x + 2y + 2z = D$ för något (reellt) tal D. Insättning av en punkt i planet, t.ex. P, ger $D = -6$. Alltså är $-2x + y + z = -3$ en ekvation för planet Π.

(b) Om $y = t$ ger $x + y = 1$ att $x = 1 - t$, dvs. den skalärparametriska formen av skärningslinjen är

$$\ell : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

vilket ger den vektorparametriska formen

$$\ell : \mathbf{x} = (1, 0, -1) + t(-1, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

och därmed punkten $\mathbf{x}_0 = (1, 0, -1)$ på linjen och riktningsvektorn $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$. Det sökta avståndet s mellan punkten $\mathbf{x} = (-1, -2, 1)$ och linjen ℓ kan nu beräknas enligt

$$s = \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|(-2, -2, 2) \times (-1, 1, 0)|}{\sqrt{2}} = \frac{|(-2, 2, -4)|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}.$$

3. Kom ihåg att $\exp(t)$ och $\sqrt{t}$ har definitionsmängderna $\mathbb{R}$ respektive $[0, \infty)$. Vi har därmed

$$D_f = (-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty).$$

Eftersom funktionen är jämn ($f(-x) = f(x)$) behöver vi endast betrakta $x \in [1/2, \infty)$. Vi har $f(1/2) = 0$ och

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{4-1/x^2}}{e^{x^2}} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

(där den sista likheten kan visas, t.ex., med l'Hôpitals regel). Genom att använda produkt- och kedjeregeln beräknar vi derivatan

$$f'(x) = -2x\exp(-x^2)\sqrt{4x^2-1} + e^{-x^2}\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-1}} = \frac{-2x(4x^2-1)+4x}{\sqrt{4x^2-1}}e^{-x^2} = \frac{2x(3-4x^2)}{\sqrt{4x^2-1}}e^{-x^2}.$$

Detta innebär att f är strängt växande på intervallet $(1/2, \sqrt{3}/2)$ och strängt avtagande på intervallet $(\sqrt{3}/2, \infty)$. På grund av att $f(1/2) = 0$ och ovanstående gränsvärde kan vi därmed konstatera att värdemängden $V_f = [0, f(\sqrt{3}/2)]$. Vi har

$$f(\sqrt{3}/2) = e^{-3/4}\sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} - 1} = \sqrt{2}e^{-3/4}$$

och det slutgiltiga svaret blir

$$V_f = \big[0, \sqrt{2}e^{-3/4}\big].$$

4. (a) För varje $\epsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ sådant att $0 < |x-a| < \delta$ medför att $|f(x) - L| < \epsilon$.

(b) Se Example 4 i Section 1.5 i Adams & Essex, 'Calculus'.

5. Vi har $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Derivatan beräknas enligt

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x(x^2-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2},$$

vilket ger den enda kritiska punkten $x = 0$.

Vidare ges andraderivatan av

$$g''(x) = \frac{2}{(x^2-1)^2} - 2\frac{4x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-6x^2-2}{(x^2-1)^3} \neq 0$$

och därmed saknas inflektionspunkter.

Vi har nu följande tabell

x		-1		0		1	
g'	$-$		$-$		$+$		$+$
g''	$-$		$+$		$+$		$-$
g	$\searrow$ konkav	ej def.	$\searrow$ konvex	min	$\nearrow$ konvex	ej def.	$\nearrow$ konkav

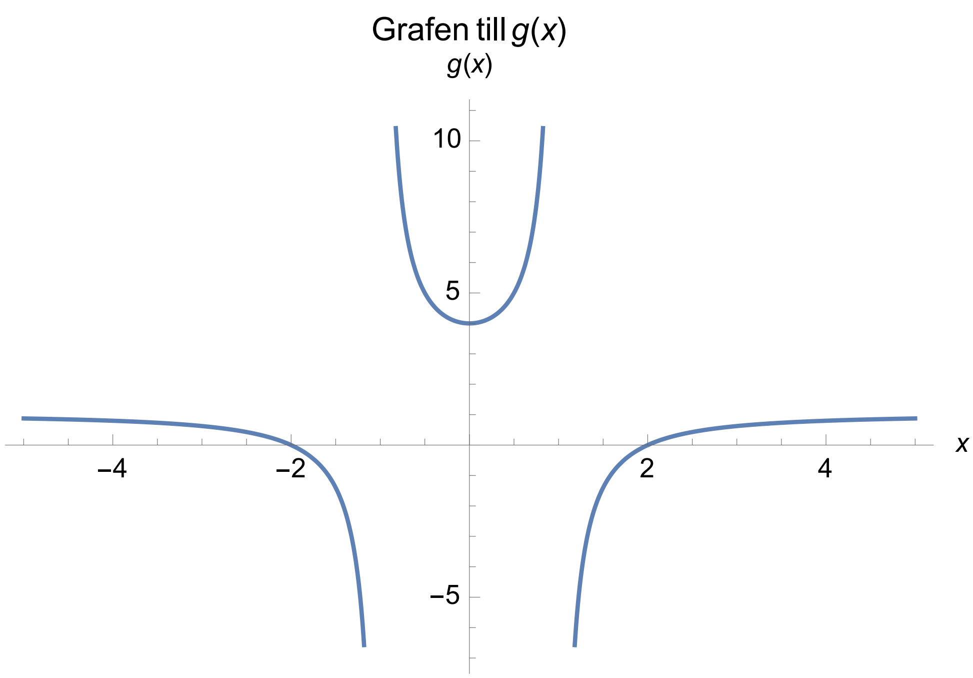
Eftersom

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$$

har vi vågräta asymptoter $y = 1$ då $x \to \pm\infty$. Vi har även lodräta asymptoter $x = \pm 1$ med

$$\lim_{x \to 1^\pm} g(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \to -1^\pm} g(x) = \pm\infty.$$

Slutligen observerar vi att grafen korsar x-axeln i punkterna $x = \pm 2$ och ritar grafen:



6. Låt C beteckna triangelns tredje hörn med koordinater (x, h). Eftersom basen har längd 2 ges triangelns area av $A = \dfrac{2h}{2} = h$, och eftersom det är givet att $A = 1$ har vi $h = 1$. Det följer av Pythagoras sats att summan av längderna av sidorna AC och BC ges av

$$L(x) = \sqrt{(x+1)^2+1} + \sqrt{(x-1)^2+1}.$$

Genom att använda kedjeregeln beräknar vi derivatan

$$L'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} + \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$$

och andraderivatan

$$\begin{aligned} L''(x) &= \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} - \frac{(x+1)^2}{((x+1)^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} - \frac{(x-1)^2}{((x-1)^2+1)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{((x+1)^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{((x-1)^2+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Vi observerar att $L'(0) = 0$ och att $L''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Detta innebär att $x = 0$ är den globala minimumpunkten för $L(x)$ och därmed att triangelns minimala omkrets är

$$2 + L(0) = 2 + 2\sqrt{2} = 2(1+\sqrt{2}).$$

7. (a) En funktion f är kontinuerlig i en punkt $a \in D_f$ om gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(b) En funktion f är deriverbar i en punkt $a \in D_f$ om gränsvärdet $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existerar.

(c) Genom att använda att $2-x$ och $\sin(\pi x/2)$ är kontinuerliga funktioner beräknar vi gränsvärdena

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sin(\pi x/2) = \sin(\pi/2) = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 2-1 = 1.$$

Detta ger att $\lim_{x\to 1} f(x)$ existerar samt att $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ och vi har därmed visat att f är kontinuerlig i $x = 1$. Angående derivatan observerar vi att

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2-(1+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} (-1) = -1.$$

Genom att använda den trigonometriska additionsformeln

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

och gränsvärdet (man kan använda l'Hôpitals regel istället)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

härleder vi

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1)-f(1-h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-\cos(\pi h/2)}{h} = 0.$$

Därmed existerar ej derivatan $f'(1) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ eftersom ovanstående beräkningar visar att motsvarande höger- och vänstergränsvärden är olika.