Anonym kod	TMV122/177 Inledande Matematik Z/TD 2018-10-31	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

(i) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x - \sin^3 x}{x^2+2x}\right)$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

Lösning:

i) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x - \sin^3 x}{x^2+x}\right) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,(1-\sin^2 x)}{x\,(x+2)}$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\,\dfrac{\cos^2 x}{x+2} = \left\{\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1\right\} = 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

ii) $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ $\quad \ln y = 3x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} 3\,\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ $= \{\text{l'Hôpital}\} = \lim_{x\to\infty} 3\,\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}$

$= \lim_{x\to\infty} 3\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} y = e^3$

Svar: i) $\frac{1}{2}$ ii) e^3

(b) Bestäm samtliga lösningar till det linjära ekvationssytemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 22 \end{cases}$$

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & -8 & 22 \end{array}\right] (-1)\ (2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1-2t \\ x_2 = t \text{ fri variabel} \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

Svar: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}$

Var god vänd!

(c) Lös ekvationen $\log_3(27) - \log_5\left(e^{6x}\right) = 0$. (2p)

Lösning:

$$\log_3(27) - \log_5(e^{6x}) = 3 - \frac{\ln(e^{6x})}{\ln 5} = 3 - \frac{6x}{\ln 5} = 0$$

$$\Rightarrow 6x = 3\ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{2}$$

Svar: $x = \frac{\ln 5}{2}$

(d) Beräkna $f'(1)$ om $f(x) = \dfrac{e^{4x}}{\arccos(\ln(x^2))}$. (2p)

Lösning:

$$f'(x) = 4e^{4x}(\arccos(\ln x^2))^{-1} - e^{4x}(\arccos(\ln x^2))^{-2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(\ln x^2)^2}}\right)\left(\frac{1}{x^2}\cdot 2x\right)$$

$$f'(1) = 4e^4(\arccos(0))^{-1} + e^4(\arccos(0))^{-2}\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}\left(\frac{1}{1}\cdot 2\right)$$

$$= \left\{\arccos(0) = \frac{\pi}{2}\right\} = e^4\left(4\,\frac{2}{\pi} + 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\right) = 8e^4\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right)$$

Svar: $f'(1) = 8e^4\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right)$

(e) Bestäm var tangenten till enhetscirkeln i punkten (x_0, y_0), med $y_0 \neq 0$, skär y-axeln. (2p)

Lösning:

Enhetscirkeln: $x^2 + y^2 = 1$ Implicit derivering: $2x + 2yy' = 0$

$\Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ I punkten (x_0, y_0): $y' = -\frac{x_0}{y_0}$

Tangentens ekvation: $(y - y_0) = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

$$\Rightarrow y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{1}{y_0}\underbrace{(x_0^2 + y_0^2)}_{=1} = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{1}{y_0}$$

Svar: Tangenten skär y-axeln i $\left(0, \frac{1}{y_0}\right)$

(f) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \ln\left(\sin(x)\cos(x) + \dfrac{3}{2}\right), x \in \mathbb{R}$. (2p)

Lösning: $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ har värdemängd $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\ln(x)$ strängt växande $\left(\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} > 0\right)$

$\Rightarrow f(x)$ har värdemängden $\left[\ln\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right), \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\right] = [0, \ln 2]$

Svar: $V_f = [0, \ln 2]$

2) Bestäm första parametrisk form för ℓ_1, ℓ_2

$\ell_1: \vec{x} = \vec{x}_1 + t\vec{v}_1$; $\vec{x}_1 = (1,0,-4)$, $\vec{v}_1 = (-1,3,1)$, $t \in \mathbb{R}$

$\ell_2: \vec{x} = \vec{x}_2 + s\vec{v}_2$; $\vec{x}_2 = (2,3,1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,2)$, $s \in \mathbb{R}$

a) Skärningspunkt existerar om systemet $\vec{x}_1 + t\vec{v}_1 = \vec{x}_2 + s\vec{v}_2$ har entydig lösning:

$$\begin{cases} 1-t = 2+s \\ 3t = 3 \\ -4+t = 1+2s \end{cases} \iff \begin{cases} -t-s = 1 \\ 3t = 3 \\ t-2s = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) & (-1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot -1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

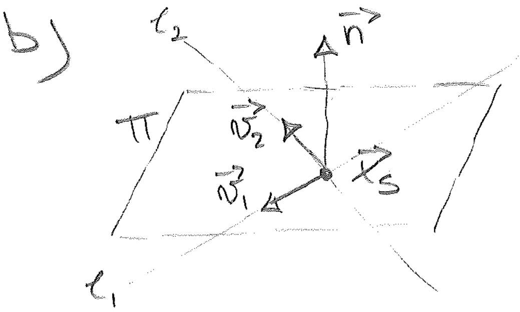
$\Rightarrow$ Systemet har entydig lösning $t=1$, $s=-2$

Skärningspunkten ges då av

$$\vec{x}_s = \vec{x}_1 + t\vec{v}_1 = (1,0,-4) + (-1,3,1) = (0,3,-3)$$

<u>Svar</u>: $\vec{x}_s = (0,3,-3)$

b)



Att planet π innehåller både ℓ_1 och ℓ_2 betyder

$\vec{n} \perp \vec{v}_1$ och $\vec{n} \perp \vec{v}_2$

där $\vec{n}$ är normalen till π $\Rightarrow$ $\vec{n} \parallel \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6, 3, -3)$$

Längden av $\vec{n}$ irrelevant

Vi väljer $\vec{n} = \frac{1}{3}(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (2, 1, -1)$

$\Rightarrow \pi: \ 2x + y - z = D$

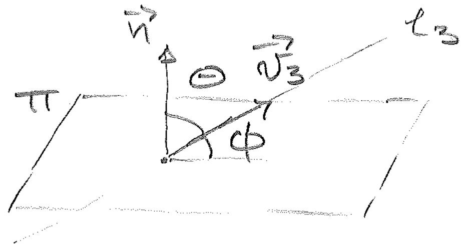
För att bestämma D behöver vi punkt i planet, tag tex $\vec{x}_s \in \pi$:

$$D = \vec{n} \cdot \vec{x}_s = (2, 1, -1) \cdot (0, 3, -3) = 6$$

$\Rightarrow \pi: \ 2x + y - z = 6$

<u>Svar:</u> Planets ekvation är $\pi: \ 2x + y - z = 6$

c)



Låt ϕ beteckna vinkeln mellan π och ℓ_3

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

Vinkeln θ mellan $\vec{n}$ och ℓ_3 uppfyller också $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ och ges av

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{v_3}}{|\vec{n}||\vec{v_3}|} \right|$$

där $\vec{v_3} = (1, 1, 0)$ är riktningsvektorn till ℓ_3

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{|(2,1,-1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Vinkeln ϕ ges då av relationen

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

<u>Svar:</u> Vinkeln mellan π och ℓ_3 är $\phi = \frac{\pi}{3}$.

3) Rita grafen till $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Steg 1: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Steg 2: $f'(x) = 3x^2(x-1)^{-2} - 2x^3(x-1)^{-3}$

$$= \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$ kritiska punkter

Steg 3: $f''(x) = (3x^2 - 6x)(x-1)^{-3} - 3(x^3 - 3x^2)(x-1)^{-4}$

$$= \frac{(3x^2-6x)(x-1) - 3(x^3-3x^2)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{3x^3} - \cancel{3x^2} - \cancel{6x^2} + 6x - \cancel{3x^3} + \cancel{9x^2}}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pot. inflektionspunkt

Steg 4:

x		0		1		3	
f'	+	0	+	ej def.	−	0	+
f''	−	0	+	ej def.	+		+
f	↗	0	↗	ej def.	↘		↗
	∩		∪		∪		∪
		infl. pkt.				lokalt min.	

$f(3) = \dfrac{3^3}{(3-1)^2} = \dfrac{27}{4}$

Steg 5: Asymptoter

I Lodräta:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0}} = \infty$$

$\Rightarrow$ Lodrät asymptot $x = 1$.

II Vågräta:

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Inga vågräta asymptoter.

III Sneda:

$$k_1 = \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 1$$

$$m_1 = \lim_{x\to \infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 2x^2 - x}{(x-1)^2}$$

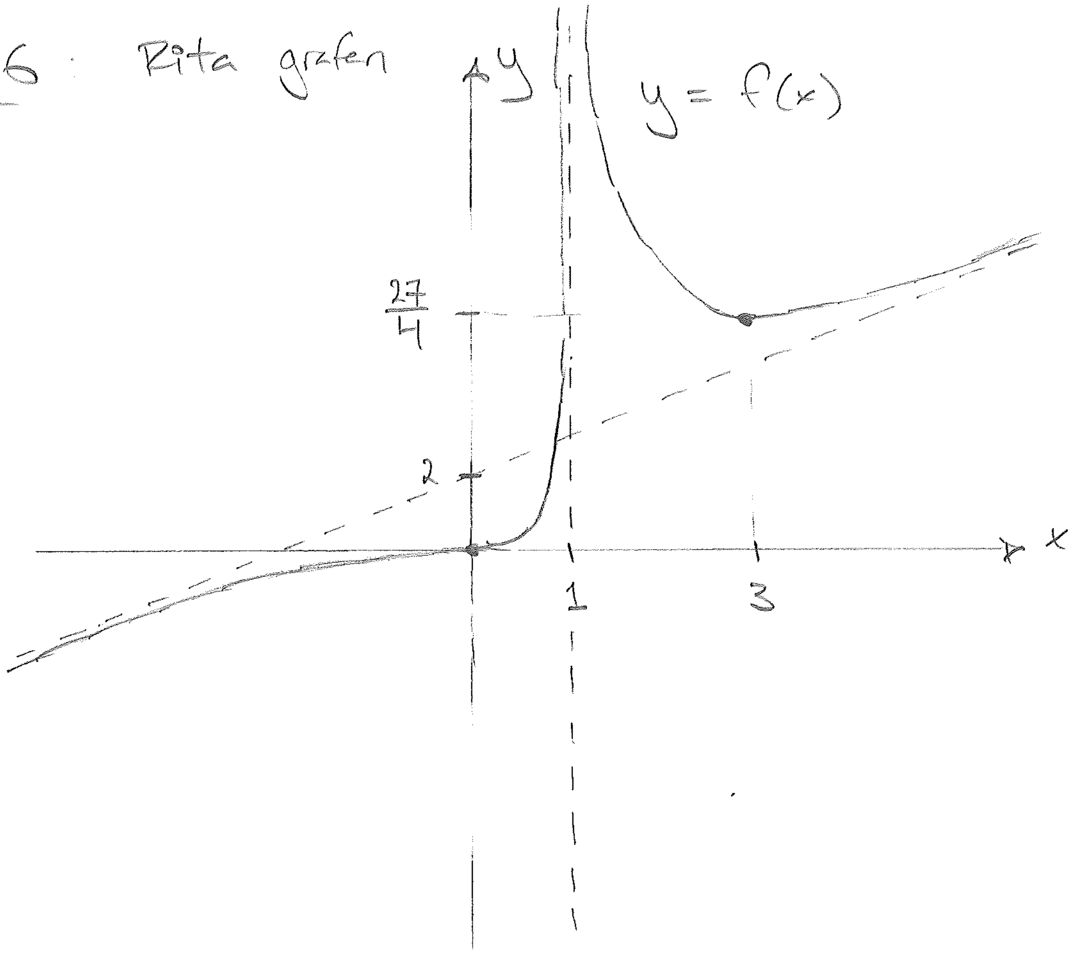
$$= \lim_{x\to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 2$$

Pss. fås $k_2 = 1$ och $m_2 = 2$ då $x \to -\infty$

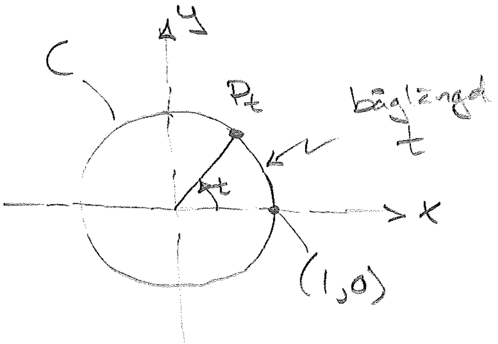
$\Rightarrow$ Sned asymptot $y = x + 2$

då $x \to \pm\infty$

Steg 6: Rita grafen



4 a) Låt P_t vara den punkt på enhetscirkeln $C: x^2+y^2=1$ som svarar mot en cirkelbåge av längd t mätt längs C med $(1,0)$ som utgångspunkt och positiv riktning enl figur.



Vi definierar då $\cos(t)$ och $\sin(t)$ som x- resp y-koordinaten för P_t, $\forall t \in \mathbb{R}$

b) Se "Theorem 8" i kap. 2.5 i "Calculus" av Adams och Essex.

5a) $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ strängt växande på $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ injektiv på $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ inverterbar på $\mathbb{R}$ $\boxtimes$

b) Låt $x = f(y) \iff y = f^{-1}(x)$

$x = f(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \{e^y > 0 \ \forall y\} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}$

$\iff (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0 \quad (*)$

Kvadratisk funktion i e^y med lösningar

$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$

$\sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow x - \sqrt{x^2+1} < 0$

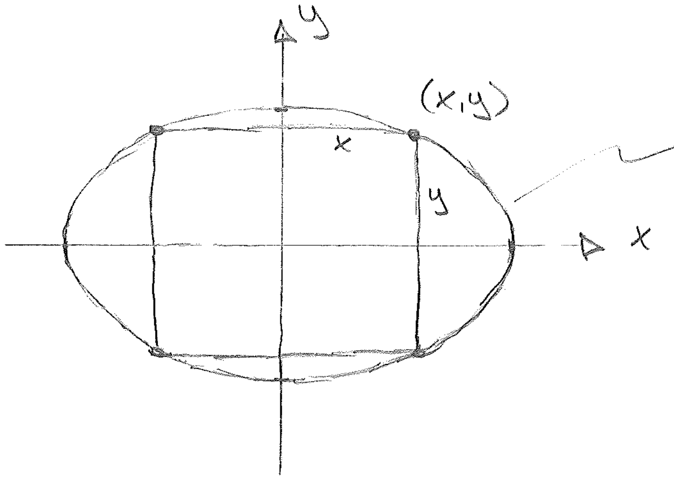
$\Rightarrow$ Då $e^y > 0 \ \forall y$ är den enda acceptabla lösningen till $(*)$ $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Svar: $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

6)



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad a,b>0$$

$0<x<a$

$0<y<b$

Rektangelns omkrets: $O = 4(x+y)$

På ellipsen gäller: $y^2 = b^2 - x^2\frac{b^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \quad y = \overset{+}{(-)}\, b\underbrace{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}_{<1} = \{\sqrt{a^2}=|a|=a\} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad O(x) = 4\left(x+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

$$O'(x) = 4\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\,\frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\frac{b}{a}x}{\underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{>0}}\right)$$

$$O'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2-x^2}-\frac{b}{a}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2-x^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(a^2+b^2) = a^4$$

$$\Rightarrow \quad x = \overset{+}{(-)}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{eftersom} \quad 0<x<a$$

$$O''(x) = -4\frac{b}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\frac{x(-\cancel{2}x)}{(a^2-x^2)^{3/2}}\right)$$

$$= -4\frac{b}{a}\left(\frac{a^2-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{(a^2-x^2)^{3/2}}\right) = -\frac{4ab}{\underbrace{(a^2-x^2)^{3/2}}_{>0}} < 0$$

$$\Rightarrow \quad O''(x) < 0 \quad \forall x \in (0,a)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{lokalt max.}$$

$$O\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 4\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{a^2+b^2}}\right)$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}\right) = 4\left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 4\sqrt{a^2+b^2}$$

Studera nu

$$\lim_{x\to 0^+} O(x) = \lim_{x\to 0^+} 4\left(x + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right) = 4b$$

$$\lim_{x\to a^-} O(x) = \lim_{x\to a^-} 4\left(x + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right) = 4a$$

Vi ser att $O\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 4\sqrt{a^2+b^2} > \max(4a, 4b)$

$\Rightarrow \exists$ globalt max. på $(0, a)$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \underline{\text{globalt}} \text{ max}$$

Svar: Den största omkretsen för rektangeln är $4\sqrt{a^2+b^2}$ l.e.

7 a) Se "Theorem 15" i kap. 2.8 i "Calculus" av Adams och Essex.

b) Se "Theorem 11" samt bevis på s. 143 i kap. 2.8 i "Calculus" av Adams och Essex.