1a) (i) $\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{2x}\right) = \left\{ y = \frac{1}{2x} \right\}$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin(y)}{y} = \left\{ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right\} = \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\lim_{x \to 0} (1-x)^{1/x} \leftarrow [1^\infty]$$

Sätt $y = (1-x)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln(1-x)$

$$\lim_{x \to 0} \ln y(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} \leftarrow \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \{ \text{l'Hôpital} \} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} y(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ ty y kont.

<u>Svar:</u> i) $\frac{1}{2}$ ii) $\frac{1}{e}$

1b) Utökad koeff. matris för systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & a & 3a \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \leftarrow (1) \\ \leftarrow (-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & 3a-1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \times \frac{1}{3} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 3a-1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1) \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 3a-2 \end{array}\right]$$

=> Om $a = 2$ har vi rad $[0\ 0\ 0 \mid 4]$ dvs lösningar saknas. Om $a \neq 2$ har koeff.matrisen pivot kolumner i varje rad dvs entydig lösning.

<u>Svar:</u> Systemet saknar lösning för $a = 2$ och har entydig lösning för $a \neq 2$

1 c) $\vec{u} = (1, 1, 0)$ $\quad \vec{v} = (0, -1, -1)$ $\quad \phi \in [0, \pi]$

$$\cos\phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

<u>Svar:</u> $\phi = \frac{2\pi}{3}$

1 d) Derivera $e^y + x^3 = xy$ implicit:

$$y' e^y + 3x^2 = y + xy'$$

$$\Rightarrow \quad y'(e^y - x) = y - 3x^2$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{y - 3x^2}{e^y - x}$$

I punkten $(x,y) = (-1, 0)$ har vi alltså

$$y' = \frac{0 - 3\cdot(-1)^2}{e^0 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

<u>Svar:</u> Lutning är $y' = -\frac{3}{2}$

1e) $f(x) = e^{\sin^2 x - \cos^2 x} = \{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)\}$

$= e^{-\cos(2x)}$

$\cos(2x)$ har värdemängd $[-1, 1]$

e^{-x} strängt avtagande

$\Rightarrow V_f = [e^{-1}, e^{1}] = [\frac{1}{e}, e]$

<u>Svar:</u> $V_f = [\frac{1}{e}, e]$

1f) $f(x) = 2x + \sin\sqrt{x}$ $\quad x \in [1, \infty)$

$f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} \geq \{|\cos x| \leq 1\} \geq 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f'(x) \geq 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ på $x \in [1, \infty)$

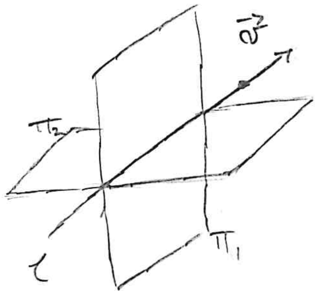
$\Rightarrow f(x)$ strängt växande — " —

$\Rightarrow f(x)$ inverterbar — " —

$\boxtimes$

2a) Planen Π_1, Π_2 har normalvektorer

$$\vec{n}_1 = (1,1,0) \qquad \vec{n}_2 = (1,0,-1)$$



Riktningsvektorn $\vec{v}$ för skärningslinjen l uppfyller $\vec{v} \perp \vec{n}_1$ och $\vec{v} \perp \vec{n}_2$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,-1)$$

Eftersom längden av $\vec{v}$ godtycklig: $\vec{v} = (-1,1,-1)$

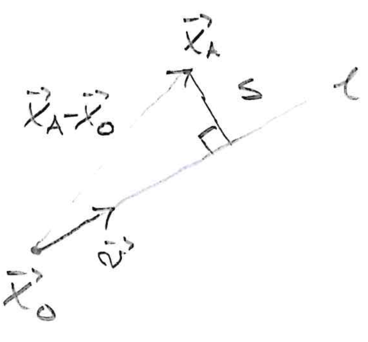
Vi behöver en punkt på l dvs $\vec{x}_0$: $\vec{x}_0 \in \Pi_1$ och $\vec{x}_0 \in \Pi_2$

Vi söker alltså lösning till $\begin{cases} x+y=1 \\ x-z=1 \end{cases}$

Välj $z = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}_0 = (1,0,0)$$

Minsta avståndet från l till $\vec{x}_A = A = (1,2,2)$



$$s = \frac{|(\vec{x}_A - \vec{x}_0) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{x}_A - \vec{x}_0 = (0,2,2)$$

$$\Rightarrow (\vec{x}_A - \vec{x}_0) \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4, -2, 2)$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{\sqrt{16+4+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Svar: Det minsta avståndet är $s = 2\sqrt{2}$ l.e.

b) Planet π_3 har normalvektor $\vec{n}_3 = (1, 1, -1)$

Det sökta planet π har alltså en normalvektor $\vec{n} \perp \vec{n}_3$ och innehåller vektorn $\vec{v} = \vec{x}_C - \vec{x}_B = C - B = (-3, 3, 3)$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \parallel \vec{n}_3 \times \vec{v}$$

$$\vec{n}_3 \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (6, 0, 6)$$

Eftersom längden av $\vec{n}$ godtycklig: $\vec{n} = (1, 0, 1)$

$$\Rightarrow \quad \pi: \quad x + z = D$$

$$D = \vec{n} \cdot \vec{x}_B = (1,0,1) \cdot (2,-3,-1) = 2 - 1 = 1$$

Svar: Planets ekvation är $\pi: \; x + z = 1$

3) Rita grafen till $f(x) = (x+2)e^{-x}$

Steg 1: $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ nollställe

Steg 2: $f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ kritisk punkt

Steg 3: $f''(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pot. infl. punkt

Steg 4:

x		-2		-1		0	
f'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
f''	$-$		$-$		$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	lokalt max.	$\searrow$		$\searrow$
	$\cap$		$\cap$		$\cap$	infl. pkt.	$\cup$

$f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e$

$f(0) = 2e^{-0} = 2$

Steg 5: Asymptoter

I Lodräta: Inga lodräta asymptoter

II Vågräta: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{e^x} = 0$

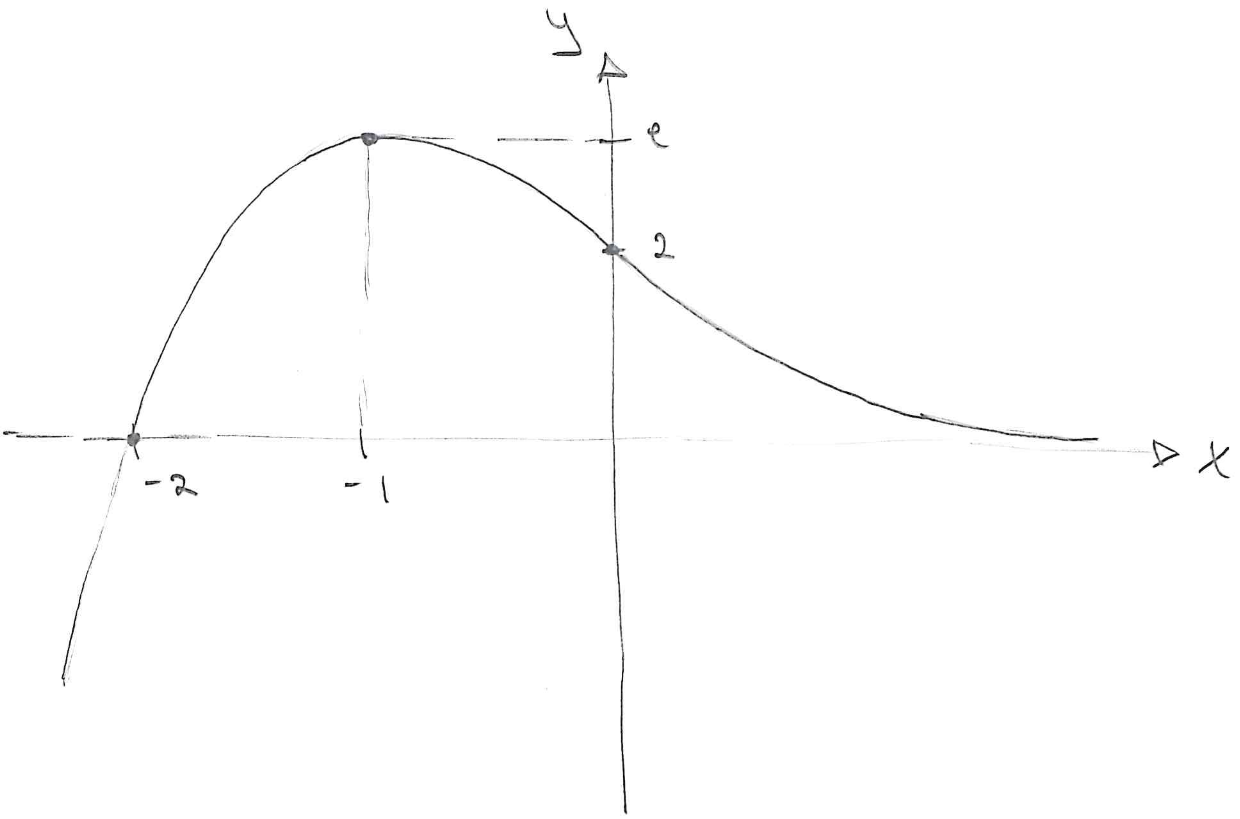
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty$

$\Rightarrow$ $y = 0$ vågrät asymtot då $x \to \infty$

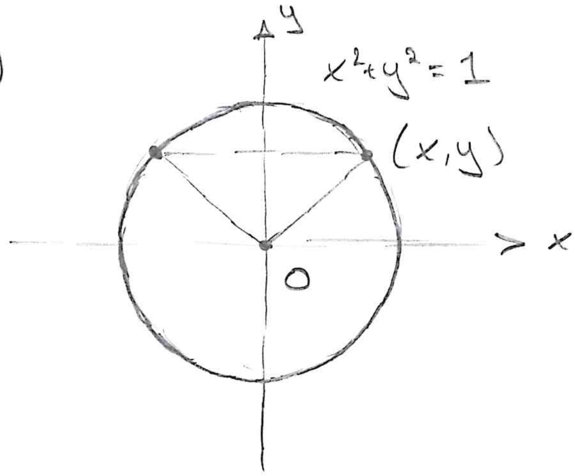
III Snede: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} = \infty$

$\Rightarrow$ Ingen sned asymptot då $x \to -\infty$

Steg 6:



4)



$$A = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{1}{2} 2x \cdot y = xy$$

På enhetscirkeln gäller

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Pga symmetri kan vi begränsa oss till $x, y \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

Vi söker alltså maximera $A(x) = x\sqrt{1-x^2}$ på $x \in [0,1]$

$$A'(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$= \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (\pm)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

kritisk punkt

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$A(0) = A(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ globalt maximum}$$

ty $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$

Svar: Triangelns största möjliga area är $A = \frac{1}{2}$ a.e.

5) Vi studerar ekvationen $e^{at} = t^2$ $a \in \mathbb{R}$

Eftersom $e^{at} = 1 \neq t^2 = 0$ för $t = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$

kan vi begränsa oss till $t \neq 0$

$$\overset{\ln}{\Rightarrow} \quad at = \ln t^2 = 2 \ln |t| \quad \Rightarrow \quad a = 2 \frac{\ln |t|}{t}$$

Låt $f(t) = 2 \frac{\ln |t|}{t} \Rightarrow f(-t) = 2 \frac{\ln |-t|}{-t} = -f(t)$

Eftersom $f(t)$ är udda räcker det att

undersöka $f(t)$ för $t > 0$:

$$f(t) = 2 \frac{\ln t}{t} \Rightarrow f'(t) = 2 \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \ln t}{t^2} = 2 \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = e, \quad f(e) = \frac{2}{e}$$

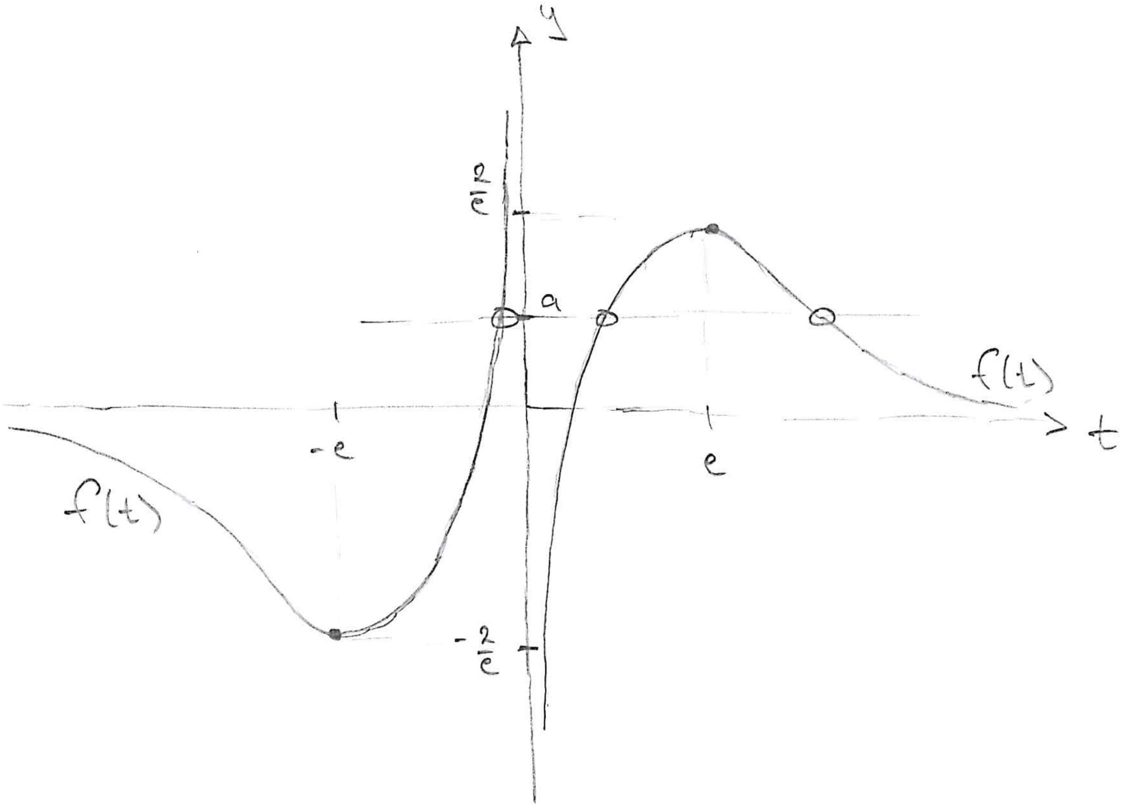
Dessutom har vi $\begin{cases} f'(t) > 0, & t < e \\ f'(t) < 0, & t > e \end{cases}$

ty $\ln t$ är strängt växande funktion.

Vidare är $\lim_{t \to 0^+} f(t) = -\infty$, $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$

$\Rightarrow$ Vi kan nu skissa grafen för funktionen

$f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Antalet lösningar till $f(t) = a$ ges av antalet skärningspunkter mellan $y = f(t)$ och $y = a$

$\Rightarrow$ $a > \frac{2}{e}$, $a < -\frac{2}{e}$: 1 lösning

$a = \frac{2}{e}$, $a = -\frac{2}{e}$: 2 lösningar

$0 < a < \frac{2}{e}$, $-\frac{2}{e} < a < 0$: 3 lösningar

$a = 0$: 2 lösningar

Svar: Ekvationen $e^{at} = t^2$ har 1 lösning för $|a| > \frac{2}{e}$, 2 lösningar för $|a| = 0, \frac{2}{e}$ och 3 lösningar för $0 < |a| < \frac{2}{e}$

6) Se a) "Definition 8" och

b) "Exampel 4" i kap 1.5

i "Calculus" av Adams.

7) Se a) "Theorem 3" och

b) "Theorem 4" i kap 2.3

i "Calculus" av Adams.