MATEMATIK
Chalmers

Lösning till
tentamen i Inledande matematik V
tmv125.
Datum: 041022

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Beräkna $f'(1)$ då $f(x) = \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$. (2p)

   Lösning: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2) - 2x\arctan x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-2x\arctan x}{(1+x^2)^2}$.

   Detta ger $f'(1) = \dfrac{1-2\frac{\pi}{4}}{4} = \dfrac{2-\pi}{8}$.

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)\sin x$. (2p)

   Lösning: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)\sin x = \lim\limits_{x\to 0}(1 + x\ln x)\dfrac{\sin x}{x} = (1+0)1 = 1.$

   c) Bestäm den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$, då $\boldsymbol{u} = (2,-1,-3)$ och $\boldsymbol{v} = (1,2,-1)$. (2p)

   Lösning: Ortogonala projektionen $\boldsymbol{u_v}$ ges av projektionsformeln:

   $\boldsymbol{u_v} = \dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} = \dfrac{(2,-1,-3)\cdot(1,2,-1)}{|(1,2,-1)|^2}(1,2,-1) = \dfrac{3}{6}(1,2,-1) = \dfrac{1}{2}(1,2,-1).$

   Som kontroll räknar vi ut $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_v} = (2,-1,-3) - \dfrac{1}{2}(1,2,-1) = \dfrac{1}{2}(3,-4,-5)$ vilken vi ser är ortogonal mot $\boldsymbol{v}$.

   d) För vilka reella tal x gäller olikheten $|x^2 - 2x + 1| \le 5$? (2p)

   Lösning: $|x^2-2x+1| \le 5 \Leftrightarrow |(x-1)^2| \le 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 5 \Leftrightarrow$
   $-\sqrt{5} \le x-1 \le \sqrt{5} \Leftrightarrow 1-\sqrt{5} \le x \le 1+\sqrt{5}$.

   e) Betrakta följande fyra utsagor $P,\ Q,\ R$ och S där

   P är utsagan $\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{cases}$,

   Q är utsagan $2x - y = x + y$,

   R är utsagan $2x - y = 1$ och $x + y = 1$

   S är utsagan $2x - y = 1$ eller $x + y = 1$.

   Avgör för var och en av följande implikationer om den är sann eller falsk:

   $P \Rightarrow Q,\quad P \Rightarrow R,\quad P \Rightarrow S,\quad Q \Rightarrow P,\quad R \Rightarrow P,\quad S \Rightarrow P.$ (3p)

   Lösning: $P \Rightarrow Q$ är sann, $P \Rightarrow R$ är sann, $P \Rightarrow S$ är sann, $Q \Rightarrow P$ är falsk, $R \Rightarrow P$ är sann, $S \Rightarrow P$ är falsk.

   f) Beräkna de exakta värdena av

   $\sin(\arctan\frac{3}{4})$, $\cos(\arctan\frac{3}{4})$ och $\sin(2\arctan\frac{3}{4})$. (3p)

Lösning: Med hjälptriangel eller trigonometriska ettan ser vi att
$\sin\left(\arctan\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{5}$, $\cos\left(\arctan\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$ och
$\sin\left(2\arctan\frac{3}{4}\right) = \{\sin(2v) = 2\sin v\cos v\} = 2\frac{3}{5}\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm skärningspunkten mellan linjen genom de två punkterna $(1,1,1)$ och $(-1,2,0)$ och planet $3x + 4y - z = 0$. (6p)

Lösning: Linjens ekvation på parameterform är

$$\begin{cases} x &= 1-2t \\ y &= 1+t \\ z &= 1-t \end{cases}.$$

Insatt i planets ekvation ger detta: $3(1-2t) + 4(1+t) - (1-t) = 0$ och alltså $t = 6$.

Skärningspunkten är $(-11, 7, -5)$.

3. Bestäm alla asymptoter till $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 2x - 1}{x^2 + x}$. (6p)

Lösning: $|f(x)| \to \infty$ då $x \to \pm\infty$ eftersom täljaren $2x^3 - x^2 - 2x - 1$ har högre grad än nämnaren. Det kan således finnas sneda asymptoter då $x \to \pm\infty$.

Vidare gäller: $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$, $f(x) \to \infty$ då $x \to 0^-$, $f(x) \to \infty$ då $x \to -1^+$ och $f(x) \to -\infty$ då $x \to -1^-$ eftersom $2x^3 - x^2 - 2x - 1 < 0$ för $x = 0,\ -1$ och nämnaren är 0 för dessa x-värden. Linjerna $x = 0$ och $x = -1$ är alltså lodräta asymptoter.

Vi har också att

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 2x - 1}{x(x^2 + x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

och

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 2x - 1 - 2x(x^2 + x)}{x^2 + x} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2 - 2x - 1}{x^2 + x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -3.$$

Linjen $y = 2x - 3$ är asymptot då $x \to \pm\infty$.

Man kan naturligtvis istället dividera täljaren med nämnaren och får då:

$f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 2x - 1}{x^2 + x} = 2x - 3 + \dfrac{x - 1}{x^2 + x}$ vilket direkt visar att $y = 2x - 3$ är asymptot då $x \to \pm\infty$.

4. Bestäm, för alla reella värden på k, antalet rötter till ekvationen
   $(x^2 + 4x + 1)e^{-x} = k$ (6p)

   Lösning: Sätt $f(x) = (x^2 + 4x + 1)e^{-x}$. Då är $f'(x) = (2x + 4 - (x^2 + 4x + 1))e^{-x} = -(x^2 + 2x - 3)e^{-x}$ med $D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$.

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ -3,\ f'(x) = -(x + 3)(x - 1)e^{-x}$

   $f(-3) = -2e^3,\ f(1) = 6e^{-1}$

   $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 + 4x + 1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}(1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x}) = 0$ (standardgränsvärde).

   $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 + 4x + 1)e^{-x} = \lim\limits_{t\to\infty}(t^2 - 4t + 1)e^{t} = \infty.$

   Vi får följande tabell:

x	$-\infty$	$<$	-3	$<$	1	$<$	∞
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$-2e^3$	$\nearrow$	$6e^{-1}$	$\searrow$	0

   Vi kan nu dra slutsatsen:
   för $k < -2e^3$ har ekvationen ingen lösning,
   för $k = -2e^3$ har ekvationen en lösning,
   för $-2e^3 < k \le 0$ har ekvationen två lösningar,
   för $0 < k < 6e^{-1}$ har ekvationen tre lösningar,
   för $k = 6e^{-1}$ har ekvationen två lösningar,
   för $6e^{-1} < k$ har ekvationen en lösning.

5. För varje $t > 0$ har ekvationen $e^{\frac{1}{x}} = xt$ exakt en positiv rot. Beteckna denna rot $r(t)$. Visa att gränsvärdet $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)\ln(t)$ existerar och beräkna det. (6p)

   Lösning: Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}},\quad x > 0$ är strängt avtagande. Detta kan inses t.ex. av att $g(y) = ye^y,\quad y > 0$ är produkten av två strängt växande positiva funktioner och därmed strängt växande. Den sammansatta funktionen $f(x) = g(\dfrac{1}{x})$ är då strängt avtagande för $x > 0$. Vidare är $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   Nu är $e^{\frac{1}{x}} = xt \Leftrightarrow f(x) = t$ som har unik lösning $r(t)$ för alla $t \in V_f =]0, \infty[$. Funktionen $r(t)$ är alltså inversen till f och vi har att $t = f(r(t)) =$

$\frac{1}{r(t)} e^{\frac{1}{r(t)}}$ och att $r(t) \to 0$ då $t \to \infty$.

Då är $\lim_{t\to\infty} r(t)\ln(t) = \lim_{t\to\infty} r(t)\ln(\frac{1}{r(t)} e^{\frac{1}{r(t)}}) = \lim_{t\to\infty} r(t)\left(\ln(e^{\frac{1}{r(t)}}) - \ln(r(t))\right) = \lim_{t\to\infty} r(t)\left(\frac{1}{r(t)} - \ln(r(t))\right) = 1 - \lim_{t\to\infty} r(t)\ln(r(t)) = 1 - \lim_{y\to 0} y\ln y = 1 - 0 = 1$, (standardgränsvärde).

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

   a) Om f är en kontinuerlig funktion med $f(0) = 0$ och g är definierad i en omgivning, $0 < |x| < h$, av 0, så är $\lim_{x\to 0} (f(x)g(x)) = 0$.

   Svar: Falsk. $f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} (f(x)g(x)) \neq 0$

   b) För alla komplexa tal z och w med $w \neq 0$ är $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

   Svar: Sann.

   c) Om $x \in [-1, 1]$ så är $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

   Svar: Sann.

   d) Om $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ så gäller $\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

   Svar: Falsk. $f(x) = e^{x+1}, \; g(x) = e^x \Rightarrow \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{x+1}{x} \neq \frac{f(x)}{g(x)} = e$

   e) Om $d_1 \neq d_2$ så är de två planen $ax + by + cz = d_1$ och $ax + by + cz = d_2$ parallella.

   Svar: Sann. de har samma normalvektor (a, b, c).

   f) Om $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ är vektorer i rummet och $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ så är $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ parallella.

   Svar: Falsk. Med $\boldsymbol{u} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 1, 0)$ och $\boldsymbol{w} = (0, 0, 1)$ är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ men $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ är inte parallella.

(6p)

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion har ett lokalt maximum i en punkt.

   b) Formulera och bevisa en sats som beskriver samband mellan lokala maxima och derivatans nollställen.

   c) Ge exempel på en funktion som har minst ett lokalt maximum som inte kan hittas med hjälp av satsen ovan. (6p)