Övningstenta nr. 1

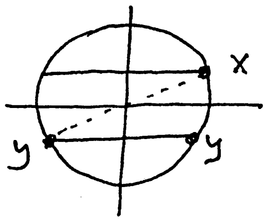
1a) $x + \ln(e^x+1) = \ln 3 \iff x = \ln\left(\frac{3}{e^x+1}\right) \iff e^x = \frac{3}{e^x+1}$

$\iff e^{2x} + e^x - 3 = 0 \iff e^x = -\frac{1}{2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{1}{4}+3} = -\frac{1}{2} \overset{+}{(-)} \frac{\sqrt{13}}{2}$

(eftersom $e^x > 0 \ \forall x$, så gäller ej $-$tecknet)

$e^x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \iff \underline{x = \ln\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)}$ <u>enda lösningen</u>

b) $\sin 7x + \sin x = 0 \iff \sin 7x = -\sin x$

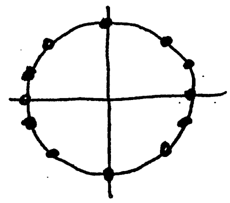


OBS. att $\sin y = -\sin x \iff$

$$\begin{cases} y = -x + n2\pi & \text{eller} \\ y = x + \pi + n2\pi \end{cases}$$

$\therefore \sin 7x = -\sin x \iff \begin{cases} 7x = -x + n2\pi & \text{eller} \\ 7x = x + \pi + n2\pi \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} 8x = n2\pi & \text{eller} \\ 6x = \pi + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = n\pi/4 & \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{3} \end{cases}$$



c) $\frac{\sin(x^2)}{x^4 - 5x^2} = \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2-5} \to 1 \cdot \frac{1}{0-5} = -\frac{1}{5}$ då $x \to 0$

d) $f(x) = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + 1$

e) Riktningsvektorer för planet ges t.ex. av

$\mathbf{u} = (3,1,2) - (1,2,1) = \underline{(2,-1,1)}$ och $\mathbf{v} = (4,3,0) - (1,2,1) = \underline{(3,1,-1)}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 5, 5) = 5(0,1,1)$$

$\mathbf{n} = (0,1,1)$ är en normalvektor till planet

Planets ekv. har formen

$$y + z = d$$

Genom insättning av t.ex. punkten $(1,2,1)$ fås att $d = 3$. Planets ekv. är alltså

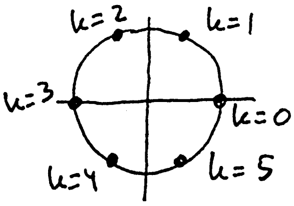
$$\underset{\sim\sim\sim}{y + z = 3}$$

(OBS. lätt att kontrollera att alla tre punkterna ligger

1f) $z^6 = 64 \iff [z = re^{i\theta}] \iff r^6 e^{6i\theta} = 64 e^{i2k\pi}$

$\iff \begin{cases} r^6 = 64 \\ 6\theta = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = 2k\pi/6 = k\pi/3 \end{cases}$

$\therefore z_k = 2e^{ik\pi/3}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$



$e^{ik\pi/3}$

Vi har $z_{0,3} = \pm 2$

$z_{1,2,4,5} = 2\left(\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= \pm 1 \pm \sqrt{3}\, i$

2) Sätt $f(x) = 2\arctan x - \frac{\pi}{2} - \ln(1+x^2)$

Visa att $f(x) < 0$ för alla $x > 1$.

Vi har $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2(1-x)}{1+x^2} < 0 \quad \forall x > 1$

Alltså är f strängt avtagande på $[1, \infty[$, vilket ger $f(x) < f(1)$ för alla $x > 1$.

Men $f(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0$. Alltså $f(x) < 0, \forall x > 1$

VSB.

3) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$, $f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 1}{(x+1)^2}$

$\therefore f'(x) > 0$ för alla $x \neq -1$

$\therefore f$ strängt växande på $]-\infty, -1[$ respektive $]-1, \infty[$

$f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x(x+1) + (x+1) - 1}{x+1} = x + 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$

$f(x) - (x+1) = -\frac{1}{x+1} \to 0$ då $x \to +\infty / -\infty$

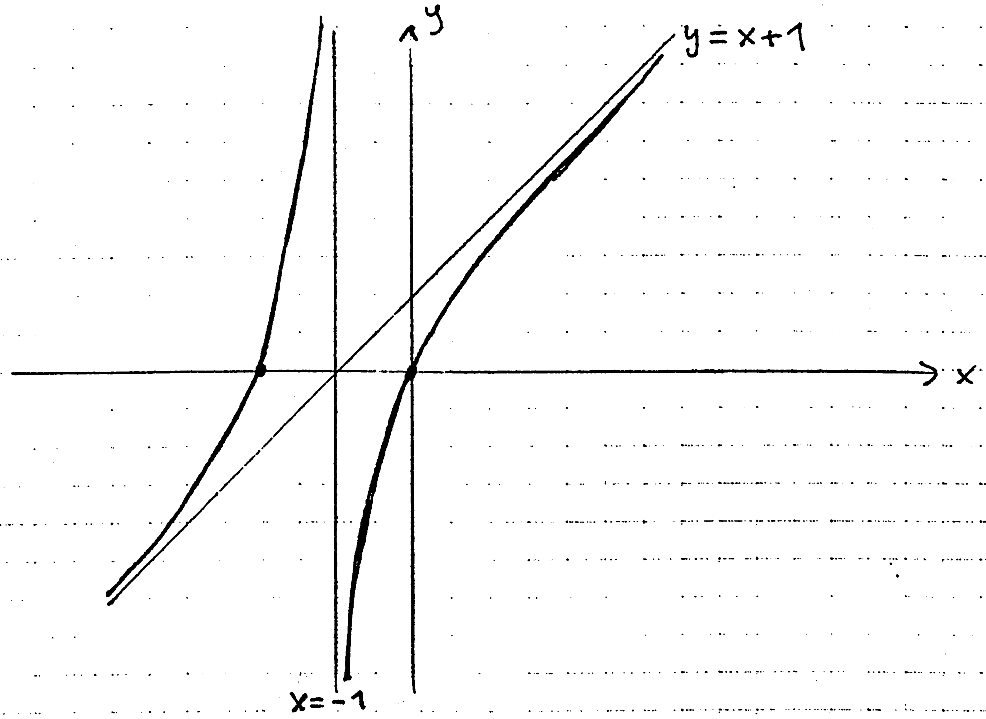
Alltså är linjen $y = x+1$ asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$.

Vi har också att

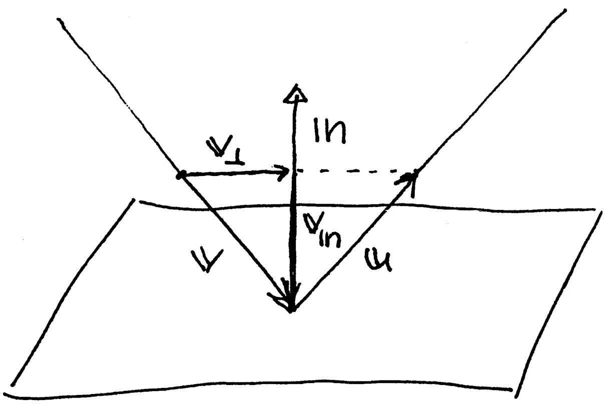
$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+1} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{då } x \to (-1)^- \\ -\infty & \text{då } x \to (-1)^+ \end{cases}$ $\therefore x = -1$ är lodrät as.

forts. 3) Lokala extrempunkter saknas.

Skärningspunkter med axlarna: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=-2$



4)



$\mathbb{n} = (2,3,-1)$

$\mathbb{v} = (2,-1,0)$

Med beteckningar enl. fig. så har den reflekterade strålen samma riktning som $\mathbb{u}$. Vi har

$$\mathbb{u} = 2\mathbb{v}_\perp - \mathbb{v} = 2(\mathbb{v}-\mathbb{v}_{\mathbb{n}}) - \mathbb{v} = \mathbb{v} - 2\mathbb{v}_{\mathbb{n}} \quad , \text{och}$$

$$\mathbb{v}_{\mathbb{n}} = \frac{\mathbb{v}\cdot\mathbb{n}}{|\mathbb{n}|^2}\mathbb{n} = \frac{(2,-1,0)\cdot(2,3,-1)}{4+9+1}\mathbb{n} = \frac{4-3}{14}\mathbb{n} = \frac{1}{14}\mathbb{n}$$

Alltså $\mathbb{u} = \mathbb{v} - \frac{2}{14}\mathbb{n} = (2,-1,0) - \frac{1}{7}(2,3,-1) = \left(\frac{12}{7}, -\frac{10}{7}, +\frac{1}{7}\right)$

Den reflekterade strålen har riktningsvektorn

$(12,-10,1)$ (t.ex.)

5) $$f(x) = \begin{cases} x(2-\sin\frac{1}{x}) & \text{om } x \neq 0 \\ a & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

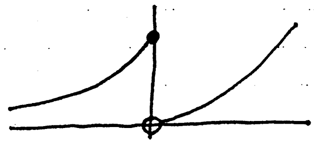
$$x\,\underbrace{(2-\sin\tfrac{1}{x})}_{\text{begr.}} \to 0 \quad \text{då} \quad x \to 0$$

$\therefore$ Med $a=0$ är f en kontinuerlig funktion.
För att avgöra om f, med $f(0)=0$, är deriverbar (i $x=0$) betraktar vi differenskvoten

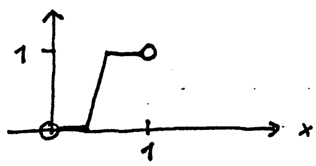
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h(2-\sin\frac{1}{h})-0}{h} = 2-\sin\frac{1}{h}$$

Denna saknar gränsvärde då $h \to 0$, varför f inte är deriverbar i $x=0$.
Eftersom en deriverbar fktn alltid är kontinuerlig går det inte att välja a så att f blir deriverbar i $x=0$.

6) a) Falskt (gäller bara för $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)
b) Sant (enl. def)
c) Falskt (sant endast för f som är kont. i $x=3$)
d) Falskt; motex:



e) Sant; t.ex



f) Falskt; (följer av satsen om största o. minsta värde)

7) Se boken