Övningstenta nr. 2

1a) $|2x+3| - |x-2| \underset{(*)}{=} 1$. Vi har två "brytpunkter" $-3/2$ och 2.

$\underline{x \le -3/2}$: $(*) \Leftrightarrow -2x-3-(-x+2) = 1 \Leftrightarrow -x-5 = 1 \Leftrightarrow \underline{x = -6}$

$\underline{-3/2 < x \le 2}$: $(*) \Leftrightarrow 2x+3-(-x+2) = 1 \Leftrightarrow 3x+1 = 1 \Leftrightarrow \underline{x = 0}$

$\underline{2 < x}$: $(*) \Leftrightarrow 2x+3-(x-2) = 1 \Leftrightarrow x+5 = 1 \Leftrightarrow x = -4$ ej i intervall

$\therefore (*) \Leftrightarrow x = -6$ eller $x = 0$.

b) Vi har påst $P: \forall y \in A \; \exists x \in \mathbb{R} ; \; x^2 = y$.

Negationen är $\neg P: \; \exists y \in A : \forall x \in \mathbb{R} : \; x^2 \ne y$.

c) $2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+1} = 20 \Leftrightarrow [\text{Sätt } t = 3^x] \Leftrightarrow 2t^2 - 3t = 20 \Leftrightarrow$
$t^2 - \frac{3}{2}t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 10} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{3 \pm 13}{4}$

$t = 3^x > 0$ ger lösningen $3^x = \frac{16}{4} = 4 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} = e^4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{4}{\ln 3}}}$

d) $(\sqrt{3}+i)^{50} = \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)^{50} = 2^{50}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{50} = (\text{de Moivre})$
$= 2^{50}\left(\cos\frac{50\pi}{6} + i\sin\frac{50\pi}{6}\right) = \left[\frac{50\pi}{6} = 8\pi + \frac{2\pi}{6}\right] = 2^{50}\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right)$
$= 2^{50}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{49}(1 + i\sqrt{3})$

e) $f(x) = 4\cos^3 x + \tan^3 x \Rightarrow f'(x) = 12\cos^2 x(-\sin x) + 3\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$
$f'(\pi/6) = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{8-27}{6} = -19/6$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ -2 & 2 & a & a \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2+a & a \end{array}\right)$ om t.ex. $a=1$ har vi parameterlösn., dvs "många lösningar".

För $a = -2$ saknas lösn.

För $a \ne -2$, $a \ne 1$ har systemet ent. lösning

Alltså är $a = 1$ enda fallet med oändligt många lösningar.

2) $\frac{3x+7}{x+1} > \frac{5}{2-x} \iff \frac{3x+7}{x+1} - \frac{5}{2-x} > 0 \iff \frac{(3x+7)(2-x)-5(x+1)}{(x+1)(2-x)} >$

$\iff \frac{6x-3x^2+14-7x-5x-5}{(x+1)(2-x)} > 0 \iff \frac{-3x^2-6x+9}{(x+1)(2-x)} > 0 \iff \frac{x^2+2x-3}{(x+1)(2-x)} <$

$\left[x^2+2x-3=0 \iff x=-1\pm\sqrt{1+3} = -1\pm 2 = \left\{\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right.\right] \iff \underbrace{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(2-x)}}_{=f(x)} < 0$

Teckentabell :

		-3		-1		1		2	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	ξ	$-$	0	$+$	ξ	$-$

Olikheten gäller för $x<-3$, $-1<x<1$, $x>2$

3) $f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}$

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x} = e^{1\cdot 0} = 1$

b) $f(1)=1$ Alltså ligger punkten $(1,1)$ på kurvan $y=f(x)$.

$f'(x) = e^{\sin x\cdot\ln x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$

$f'(1) = 1(0+\sin 1) = \sin 1$ riktn.koeff. för tangenten

Tangentens ekv. : $\underline{y = 1+\sin 1\,(x-1)} = x\sin 1 + 1 - \sin 1$

Normalens riktn.koeff. är $-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{\sin 1}$

Normalens ekv. : $\underline{y = 1-\frac{1}{\sin 1}(x-1)}$

4) $P_1: (1,0,1)$, $P_2: (-1,1,1)$, $P_3: (2,2,0)$, $P_4: (3,2,1)$

$u = \overrightarrow{P_1P_2} = (-2,1,0)$ $v = \overrightarrow{P_1P_3} = (1,2,-1)$

u och v är riktn.vektorer för planet genom P_1, P_2, P_3.

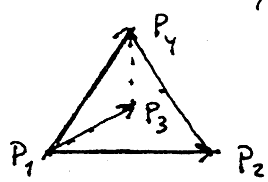
En normal ges av $u\times v =$

$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1,-2,-5)$ Välj $n = (1,2,5)$ normal

a) Den linje som går genom P_4 och är vinkelrät mot planet har ekvationen

$(x,y,z) = (3,2,1) + t(1,2,5)$, $t\in\mathbb{R}$

4b) Volymen av tetraedern med hörn i P_1, P_2, P_3, P_4 ges av $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{P_1P_4}\cdot(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3})\right|$



$\overrightarrow{P_1P_4} = (2,2,0)$

$\overrightarrow{P_1P_4}\cdot(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}) = (2,2,0)\cdot(-1,-2,-5) = -2-4 = -6$

$\therefore$ Volymen är $\frac{1}{6}|-6| = 1$ (v.e.)

5) $x-2 = \ln x \iff x-2-\ln x = 0$

Sätt $f(x) = x-2-\ln x$. Då $f'(x) = 1-\frac{1}{x} = 0 \iff x = 1$

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(1) = 1-2-0 = -1 < 0$

$f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$

Enl. Satsen om mellanl. värde har f nollställe i intervallet $]0,1[$ och eftersom f är strängt avtag. i $]0,1[$ så har f precis ett nollställe där.

Vi har också

$$f(x) = x\Big(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\Big) \to +\infty \quad \text{då } x \to \infty$$

Analogt resonemang som ovan ger att f har precis ett nollställe i $]1,\infty[$

Detta visar att ekvationen har precis två rötter.

Ska nu bestämma $a<b<c<d$ s.a. $[a,b]$ och $[c,d]$ innehåller varsin rot. Kan låta $a=0$.

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}-2-\ln\frac{1}{e} = \frac{1}{e}-2+1 = \frac{1}{e}-1 < 0$ & $\frac{1}{e} < 1$

Vi kan alltså välja $b = \frac{1}{e}$

$f(e) = e-2-\ln e = e-3 < 0$ Vi kan välja $c = e$

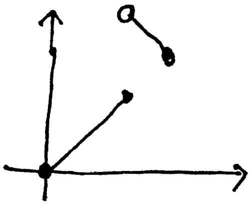
$f(e^4) = e^4-2-\ln e^4 = e^4-2-4 = e^4-6 > 2^4-6 = 10 > 0$

Alltså kan vi välja $d = e^4$, och har alltså följande intervall: $[0, e^{-1}]$ och $[e, e^4]$

6 a) Sant (de ligger jämnt fördelade på enhetscirkeln)

b) Sant (enl. def)

c) Falskt, t.ex.



är inverterbar, men *inte* str. monoton.

d) Sant (enl. sats)

e) Falskt, t.ex. $f(x) = x^3$; $f'(0) = 0$ men 0 är ej lokal extrempkt.

f) Falskt. Förutsättningen att $f'(a) = 0$ saknas.
T.ex. $f(x) = -x^2$ har $f''(x) = -2 < 0$ för alla x.

7) Se boken.