Tentamen i Inledande matematik M/TD, tmv155/175.
Tid:

MATEMATIK
Chalmers

Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt:

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Beräkna $f'(1)$ då $f(x) = \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$. Förenkla svaret så långt möjligt. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)\sin x$ (2p)

   c) Beräkna det exakta värdet av $\sin\left(2\arctan\frac{3}{4}\right)$ (3p)

   d) Bestäm vektorer $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ så att $\boldsymbol{u}_1$ är parallell med $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}_2$ är ortogonal mot $\boldsymbol{v}$, och $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}$ då $\boldsymbol{u}=(2,-1,-3)$ och $\boldsymbol{v}=(1,2,-1)$ (2p)

   e) För vilka reella tal x gäller olikheten $|4x(x-2)| \leq 5$ (3p)

   f) Betrakta följande fyra utsagor P, Q, R och S där

   P är utsagan $\begin{cases} 2x-y &= 1 \\ x+y &= 1 \end{cases}$,

   Q är utsagan $2x-y=x+y$,

   R är utsagan $2x-y=1$ och $x+y=1$

   S är utsagan $2x-y=1$ eller $x+y=1$

   Vilka implikationer eller ekvivalenser gäller mellan de fyra utsagorna? (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm skärningspunkten mellan linjen genom de två punkterna $(1,1,1)$ och $(-1,2,0)$ och planet $3x+4y-z=0$. (6p)

3. Bestäm alla asymptoter till $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-2x-1}{x^2+x}$. (6p)

4. Bestäm, för alla reella värden på k, antalet rötter i intervallet $[0, 2\pi]$ till ekvationen $x+\sqrt{2}\cos x = k$ (6p)

5. Visa att talföljden $\begin{cases} x_0 &= 0 \\ x_n &= f(x_{n-1}) \quad \text{för} \quad n>0 \end{cases}$

   där $f(x) = \frac{1}{18}(x^3+x^2+16)$, är konvergent och beräkna följdens gränsvärde. (5p)

VÄND!

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

   a) Om f är en kontinuerlig funktion med $f(0) = 0$ och g är definierad i en omgivning, $0 < |x| < h$, av 0, så är $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x)) = 0$.

   b) För alla komplexa tal z och w med $w \neq 0$ är $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

   c) Om $x \in [-1, 1]$ så är $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

   d) Om $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ så gäller $\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

   e) Om $d_1 \neq d_2$ så är de två planen $ax+by+cz = d_1$ och $ax+by+cz = d_2$ parallella.

   f) Om $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ är vektorer i rummet och $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ så är $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ parallella.

(6p)

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion har ett lokalt maximum i en punkt.

   b) Formulera och bevisa en sats som beskriver samband mellan lokala maxima och derivatans nollställen.

   c) Ge exempel på en funktion som har minst ett lokalt maximum som inte kan hittas med hjälp av satsen ovan.

(6p)

Lycka till!
Ulla/Sven/Carl-Henrik

Svar

1a) $\frac{2-\pi}{8}$. b) 1. c) $\frac{1}{2}(1, 2, -1)$. d) $1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5}$.
e) $Q \Rightarrow P$ och $S \Rightarrow P$ är falska. Resten är sanna.
1f) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ respektive $\frac{24}{25}$.
2) $(-11, 7, -5)$.
3) $x = 0$, $x = -1$ och $y = 2x - 3$
4) $k < -2e^3$: Ingen lösning, $k = -2e^3$: En lösning, $-2e^3 < k \leq 0$: Två lösningar, $0 < k < 6e^{-1}$: Tre lösningar, $k = 6e^{-1}$: Två lösningar, $6e^{-1} < k$: En lösning.
5)Gränsvärdet är 1.
6) a) falsk, b) sann, c) sann, d) falsk, e) sann d) falsk.