

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 22/1 .
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

- a) Ange absolutbelopp och ett argument för vart och ett av de komplexa talen $3 - 4i$ och $-7 + 3i$. (2p)
- b) Ange alla reella x som uppfyller olikheten $(x + 2)(x^2 + x - 6) \geq 0$. (2p)
- c) Beräkna $\sin \frac{\pi}{12}$. (2p)
- d) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + 8z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

- e) Ange följande gränsvärden: (3p)

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2 + x^4}$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ iii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3 \ln x}{x + \ln x}$

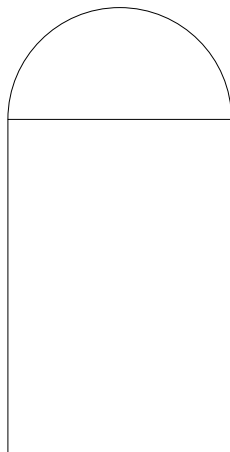
- f) Låt $f(x) = x^3 + 2x$ och notera att f är en injektiv (one-to-one) funktion. Beräkna $(f^{-1})'(3)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Ange på normalform en ekvation för det plan som är parallellt med vektorerna $(-1, -1, -1)$ och $(2, 1, 1)$ och innehåller punkten $(2, -1, 0)$. Ange också en ekvation för den rätta linje som är vinkelrät mot planet och går genom punkten $(-2, 2, 3)$. (6p)
3. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 4x + 4}$ i intervallet $x \geq 0$. (6p)
4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$. Undersök eventuella lokala extrempunkter och asymptotiskt beteende. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.) (6p)

Var god vänd!

5. Ett tvådelat fönster består av en rektangulär klar glasskiva och en halv- (6p)
cirkelformad färgad glasskiva (se fig).



Det färgade glaset släpper in hälften så mycket ljus som det klara. Om omkretsen av rektangeln är given, bestäm rektangelsidornas proportioner så att ljusinsläppet blir maximalt.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du (6p)
behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

- För alla komplexa tal z och w gäller att $|z + w| \geq |z| + |w|$.
- $e^x > 1 + x$ för alla $x > 0$.
- Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) > g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så gäller också att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.
- Det finns minst ett reellt tal x sådan att $7x^{105} + 3x^{36} + 2x^{19} + 418 = 0$.
- Om \mathbf{a}, \mathbf{b} och \mathbf{c} är tre vektorer i ett och samma plan så gäller att $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.
- Om $f(0) = f''(0) = 0$ så måste också $f'(0) = 0$.

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en (6p)
punkt a .
- b) Formulera satsen om mellanliggande värde för kontinuerliga funktioner (Intermediate Value Theorem).
- c) Låt f vara en kontinuerlig funktion från det slutna intervallet $[0, 1]$ till sig självt. Bevisa att det måste finnas minst en punkt $x \in [0, 1]$ sådan att $f(x) = x$.
(TIPS : Betrakta $f(x) - x$).

Go n'eiri an bóthar libh !
/Peter

Lösningar

1.(a) $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. $\text{Arg}(3 - 4i) = \tan^{-1}(-\frac{4}{3})$, någon vinkel i den 4:e kvadranten.

PSS, $|7 - 3i| = \sqrt{(-7)^2 + 3^2} = \sqrt{58}$ och $\arg(-7 + 3i) = \tan^{-1}(-\frac{3}{7})$. Denna gång är vinkeln i den 2:a kvadranten, ty den reella delen av talet är negativ och den imaginära delen positiv.

(b) Notera att $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ så olikheten blir till

$$(x + 2)(x + 3)(x - 2) \geq 0.$$

För att en produkt av tre tal ska vara positiv så måste antingen (i) alla tre vara positiva eller (ii) två st vara negativa och det tredje positivt.

Alternativ (i) gäller då $x \geq 2$. Alternativ (ii) gäller då $-3 \leq x \leq -2$. Sammanlagt så uppfylls olikheten alltså av $[-3, -2] \cup [2, \infty)$.

(c) Man använder följande fakta :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}, & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B, \\ & & \frac{1}{4} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Därmed har vi att

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(d) Man ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + 8z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8. \end{cases}$$

Det visar sig då att en av ekvationerna är överflödiga och man får en enparametrig lösning (dvs de tre planen skär varandra i en linje):

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

(e) För det 1:a g.v. gör vi så här :

$$\frac{\sin 4x^2}{x^2 + x^4} = \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{x^2(1+x^2)} = 4 \cdot \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Då $x \rightarrow 0$ så går båda kvoten till ett, så svaret blir 4.

För det 2:a g.v. noterar vi att om vi kvadrerar det givna uttrycket så får vi $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$ som uppenbarligen går mot +1 då $x \rightarrow -\infty$. Det givna uttrycket går därmed mot antingen $\pm\sqrt{1} = \pm 1$. Men täljaren är bara positiv och nämnaren är negativ då $x \rightarrow -\infty$ så gränsvärdet måste vara negativ, alltså -1 .

För det 3:e g.v. kan vi skriva om så här :

$$\frac{2x + 3 \ln x}{x + \ln x} = \frac{2x \left(1 + \frac{3 \ln x}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)} = 2 \cdot \frac{1 + \frac{3 \ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}}.$$

Eftersom $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ så är gränsvärdet lika med 2.

(f) Vi använder formeln

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

där $y = f(x)$. Här är $y = 3$ så vi söker x sådan att $3 = x^3 + 2x$. Man ser direkt att $x = 1$. Eftersom $f'(x) = 3x^2 + 2$ för godtyckligt x så har vi att

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 2} = \frac{1}{5}.$$

2. En normalvektor till planet är $(-1, -1, -1) \times (2, 1, 1) = (0, -1, 1)$, så planets ekvation blir $-y + z = D$. För att bestämma D sätter vi in punkten $(2, -1, 0)$ i ekvationen och ser att $D = 1$, dvs planets ekvation blir $-y + z = 1$. Den sökta linjen har riktningsvektor $(0, -1, 1)$ och har alltså ekvation $(x, y, z) = (2, 2 - t, 3 + t)$.
3. Notera att $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ som är alltid positiv. Därmed är $f(x) > 0$ för alla $x > 1$ och $f(x) < 0$ för alla $x < 1$. Näst gäller att

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 8}{(x+2)^4} = -\frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)^4} = -\frac{(x-4)(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{x-4}{(x+2)^3},$$

som är 0 precis då $x - 4 = 0$, dvs då $x = 4$. Eftersom man via inspektion ser att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$, och vi har konstaterat innan att $f(x) < 0$ då $x < 1$ så måste det vara så att f antar sitt största värde i intervallet

$[0, \infty)$ vid den kritiska punkten $x = 4$ och antar sitt minsta värde vid ändpunkten $x = 0$.

M.a.o. de största och minsta värdena ges respektivt av $f(4) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$ och $f(0) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

4. Notera att $x^2 + 3x + 3 > 0$ för alla reella x ty den kvadratiske ekvationen $x^2 + 3x + 3 = 0$ har två komplexa rötter. Så definitionsmängden till f är hela den reella linjen. När $|x|$ är stort så dominerar den linjära termen x gentemot den logaritmiska termen. Detta innebär att $f(x)/x \rightarrow -1$ då $x \rightarrow \pm\infty$. Men $f(x) - (-x) = \ln(x^2 + 3x + 3)$ går ej mot noll, snarare mot $+\infty$, dock långsamt. M.a.o. linjen $y = -x$ är inte en sned asymptot till f , vars graf ligger ovanför denna linje då $|x|$ blir stort och drar ifrån den, men så långsamt så att tangentlinjerna faktiskt närmar sig linjen $y = -x$. För att få en bra bild på grafen så återstår att hitta de kritiska punkterna. Man beräknar lätt att

$$f'(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 3} - 1,$$

som blir noll då $2x + 3 = x^2 + 3x + 3$, dvs $x^2 + x = 0$, dvs $x = 0$ eller $x = -1$. Från det asymptotiska beteendet kan vi redan inse att $x = -1$ måste vara ett lokalt minimum och $x = 0$ ett lokalt maximum.

5. Låt x resp. y beteckna längden av rektangelns vågräta resp. lodräta sidor. Då är omkretsen av fönstret $(\pi + 2)x/2 + 2y$. Omkretsen var given, så för enkelhets skull kan vi anta att omkretsen är 1. Detta ger att

$$y = \frac{1}{2} - \frac{\pi + 2}{4}x. \quad (1)$$

Låt $I(x, y)$ beteckna ljusinsläppet som en funktion av x och y . Upp till en proportionalitetskonstant så är

$$I(x, y) = 1 \times \text{skivans area} + 2 \times \text{rektangelns area} = \frac{1}{8}(\pi x^2 + 16xy).$$

Om vi substituerar (1) så kan vi uttrycka insläppet som en funktion av bara x , nämligen

$$8I(x) = 16x\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi + 2}{4}x\right) + \pi x^2 = 8x - (3\pi + 8)x^2.$$

Vi söker ett maximum för $I(x)$ så beräknar $8I'(x) = 8 - 2(3\pi + 8)x$ och sätter lika med noll. Då erhålls $x = \frac{4}{3\pi + 8}$ och instoppning i (1) ger $y = \frac{1}{2} - \frac{\pi + 2}{3\pi + 8} = \frac{\pi + 4}{2(3\pi + 8)}$.

M.a.o. för att maximera ljusinsläppet ska rektangelns bredd och höjd stå i förhållandet $8/(\pi + 4)$.

- 6.(a) Falskt. Den s.k. *triangelolikheten* säger snarare att $|z + w| \leq |z| + |w|$, med likhet om och endast om z är en positiv reell multipel av w .
- (b) Sant. Detta kan härledas från Theorem 4, p.180 eller så kan man se direkt att VL och HL är lika i $x = 0$ och derivatan till $e^x - (1 + x)$ är $e^x - 1$ som är strängt positiv då $x > 0$, som innebär att VL > HL då $x > 0$.
- (c) Falskt, t.ex. $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$ och $g(x) = 1$ för alla x . Då är uppenbarligen $f(x) > g(x)$ för alla x , men f är avtagande, med ett absolut maximum i $x = 0$, medan att g är konstant : dvs $f'(x) \leq 0$ för alla x medan att $g'(x) = 0$ för alla x .
- (d) Sant. Att polynomet har udda grad innebär att dess värden går mot $\pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$ respektivt. Att värdet noll antas någonstans följer nu från Intermediate Value Theorem.
- (e) Sant. Vektorn $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ är nollvektorn om \mathbf{a} och \mathbf{b} är parallella och rätvinklig mot båda två annars. I det senare fallet så är $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ rätvinklig mot planet som spänns upp av \mathbf{a} och \mathbf{b} , som måste sammanfalla med det givna planet. Eftersom \mathbf{c} ligger också i detta plan, så är \mathbf{c} rätvinklig mot $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, och därmed blir skalärprodukten av dessa två vektorer lika med noll.
- (f) Falskt, t.ex. om $f(x) = x$.
- 7.(a) Det innebär tre saker, att :
- f är definierad i en öppen intervall kring $x = a$,
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existerar,
 - g.v. ovan är lika med $f(a)$.
- (b) Theorem 9, p.82.
- (c) Sätt $g(x) := f(x) - x$. Så g är också definierad i hela intervallen $[0, 1]$ och kontinuerlig där. Vi noterar att, ty f antar värden i samma intervall så är å ena sidan

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0,$$

och å andra sidan

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Eftersom $g(0) \geq 0$ och $g(1) \leq 0$ och g är kontinuerlig, så innebär IVT direkt att det finns minst ett $c \in [0, 1]$ sådan att $g(c) = 0$, v.s.v.