Viktiga gränsvärden

Gränsvärden som är karakteristiska för vissa grundläggande elementära funktioner:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty \quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$

Speciella gränsvärden:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim\limits_{x\to 0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^b}{a^x} = 0$ om $a > 1$ (gäller alla reella b, men är självklart om $b \leq 0$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^a}{x^b} = 0$ om $b > 0$ (gäller alla reella a, men är självklart om $a \leq 0$)

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0$ och $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln |x| = 0$ om $a > 0$

Ytterligare ett par gränsvärden:

Antag $a > 0$. Då är $a = e^{\ln a}$, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln a}{n}}$ och $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Tillämpar vi tidigare kända gränsvärden får vi följande två intressanta gränsvärden:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$