

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor hösten 2008 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast lördag 17/01 em.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Tentorna kan granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 8.30-13.00.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

b) Lös olikheten $(1-x)(x^2+x+4) \leq 0$. (2p)

c) För vilka $\theta \in [0, 2\pi)$ gäller att $\sin 2\theta = \sin \theta$? (2p)

d) En punkt rör sig längs kurvan $y = x^3 - 3x + 5$ så att $x = \frac{\sqrt{t}}{2} + 3$, (2p)
där t är tiden.

Beräkna den momentana y -ändringen per tidsenhet då $t = 4$.

e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)(\ln x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{(\ln x)^2}} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + x^{30}}{3^x + x^2}$$

f) Funktionen $f(x) = x^3 + 4x$ är injektiv (one-to-one). (3p)

Beräkna $\phi'(0)$ och $\phi'(-5)$ där ϕ är den inversa funktionen till f .

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1, 2, 3)$, $B = (-2, -1, 2)$, $C = (1, 0, 1)$ och låt P vara planet (6p)
 $2x + 3y - z = 0$.

a) Ange en ekvation för normalen till planet P genom punkten A .

b) Ange en ekvation för planet Q som är parallellt med P och innehåller punkten A .

c) Ange skärningspunkten mellan planet P och linjen genom B och C .

Var god vänd!

3. Ange värdemängden till funktionen (6p)

$$f(x) = \ln|x - 3| + \arctan x$$

då definitionsmängden begränsas till intervallet $[-1, 3)$.

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x(x-3)}{x-4}$. (6p)
Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
(Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

5. Låt M beteckna mängden av komplexa tal z som uppfyller ekvationen (6p)

$$|z - (2 + i)| = 3.$$

Vilket tal z i mängden M ligger närmast origo i det komplexa talplanet?

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du (6p)
behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar
-1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

- a) Om funktionen f är två gånger deriverbar så är f' kontinuerlig.
- b) Om z är ett komplext tal sådan att $\text{Arg}(z) = 15^\circ$, så är $\text{Re}(z^{60}) < 0$.
- c) Derivatans av 10^x är lika med $x \cdot 10^{x-1}$.
- d) Om $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ så är $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = 1$.
- e) Om f är en injektiv och växande funktion så är f^{-1} avtagande.
- f) För alla reella tal x och y gäller att $|\sin(x + y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$.

7. a) Formulera både *satsen om mellanliggande värde* och *Max-Min-satsen* (3p)
för kontinuerliga funktioner.

- b) En Formel 1-bil kör ett varv på en 6km lång bana på exakt 2 minuter. (3p)
Förklara med hjälp av satserna ovan varför bilens hastighet är exakt
50m/s någonstans på varvet.

Lycka till!
/Lennart