MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2008-01-18, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Ragnar Freij tel 0762- 721 860

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor och SI hösten 2007 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast fredag 18/1 em.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 5 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

   b) För vilka reella tal x är olikheten $|5 - x^2| < 4$ sann? (2p)

   c) Funktionen $f(x) = e^x + \ln x$ $(x > 0)$ är inverterbar. Beräkna $(f^{-1})'(e)$. (2p)

   d) Luft pumpas in i en sfärisk ballong med hastigheten 3 m^3/s. (2p)
   Hur snabbt växer ballongens diameter i det ögonblick då diametern är en meter.

   e) Ange följande gränsvärden: (3p)

   i. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

   ii. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)}$

   iii. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{x}$

   f) Ange alla komplexa tal z sådan att $\mathrm{Im}(z) > 0$ och $z^6 = -1$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 3)$ och $C = (-1, 0, 3)$.

   a) Beräkna arean av triangeln med hörn i A, B och C. (2p)

   b) Beräkna avståndet från C till linjen genom A och B. (1p)

   c) Beräkna avståndet från punkten $D = (3, 3, 3)$ till triangelns plan. (2p)

   d) Ange ekvationen för linjen genom A och B i parameterform. (1p)

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

3. Bestäm definitions- och värdemängden för funktionen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 7x + 6}$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.) (6p)

5. 1 km från en plats A går en flod med parallella stränder och bredden 100 m. 6 km längre ned längs floden ligger en annan plats B, fast på andra sidan och 2 km från floden. Nu vill man bygga en bro vinkelrätt över floden så att färdsträckan mellan A och B via bron minimeras. Man antas röra sig rätlinjigt till och från bron. Var ska bron byggas? (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Ekvationen $x^3 + 2008x^2 + 2008x + 2008 = 0$ saknar reella lösningar.

   b) För alla komplexa, icke-reella tal z gäller att $\mathrm{Re}(z) < |z|$.

   c) För alla θ sådan att $0 < \theta < \pi/4$ så gäller att $\sin\theta < \sin 3\theta$.

   d) Om $f(x)$ är deriverbar för alla x i intervallet $(-1, 1)$ så existerar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

   e) Om f är deriverbar, $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ så måste $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

   f) Om $y = f(x)$ är en injektiv (ett-till-ett) funktion och $y = g(x)$ dess invers, så gäller att $(f \circ g \circ f)(x) = f(x)$.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)

   b) Formulera och bevisa *produktregeln*, dvs räknelagen för derivering av en produkt av två funktioner. (4p)

Lycka till!
/Lennart