MATEMATIK

Kort förberedande kurs
för blivande teknologer

av

Rolf Pettersson

Grafisk Formgivning:

Lennart Jörelid

Utgiven i juni 1999
Upplaga 10.000 ex

Centrala Studievägledningen
Chalmers Tekniska Högskola
412 96 Göteborg
Tel. 031 - 772 25 00

Till dig som söker till högre teknisk utbildning

Som du vet förutsätter studier i tekniska ämnen goda kunskaper i matematik. En stor del av det första året ägnas därför åt grundläggande matematiska ämnen. Goda resultat i de teoretiska ämnena under första studieåret ökar dina möjligheter till framgång i de fortsatta studierna. Det första läsåret vid en högskola innebär alltid en stor omställning från gymnasiestudierna. Har man då luckor i gymnasiematematiken, kan det bli rätt arbetsamt. Om du inte är säker på att du redan har mycket goda kunskaper i matematik, gör du klokt i att förbereda dig ordentligt genom att repetera gymnasiekursen och läsa in avsnitt som du kanske tidigare försummat.

Hur gör jag då?

Till hjälp får du detta kompendium "Matematik – kort förberedande kurs för blivande teknologer". Arbeta igenom det så grundligt, att du behärskar de olika avsnitten. De många övningsexemplen ger dig möjlighet till nyttig räkneträning. I början av kompendiet finns dessutom ett diagnostiskt prov och i slutet en provräkning med blandade uppgifter.

Kompendiet är avsett för c:a 50 timmars studier. Ta avsnitten i den ordning du själv finner lämplig. En metod är att först räkna alla [1] och [2]-uppgifterna (kompendiet rakt igenom). Sedan alla [3]-uppgifterna osv. Har du bra betyg i matematik från gymnasiet och tror dig kunna gymnasiekursen ganska bra, kan du försöka dig på sista uppgiften i varje övningsuppgift. (Uppgifterna är i stort sett ordnade efter växande svårighetsgrad.)

Är det något eller några områden du speciellt behöver repetera, t.ex. logaritmer, trigonometri eller derivering med hjälp av kedjeregeln, kan du i första hand koncentrera dig på dessa. *Det väsentliga är att du räknar* (mindre väsentligt är vad du räknar). Skulle du köra fast på några uppgifter kan du eventuellt få hjälp per telefon (se bilaga "Upplysningar inför terminsstarten).

Ett syfte med kompendiet "Matematik – kort förberedande kurs för blivande teknologer" är att nöta in vissa formler, som du kanske varit van att hitta i en formelsamling. *På tentamen vid de tekniska högskolorna kommer du inte att ha formelsamlingen till hands*. Försök därför att klara dig utan, när du löser övningsexemplen.

Kunskapskontroll?

Du kommer inte att avkrävas redovisning av de här repetitionsövningarna. Däremot kommer du snart att märka, att du har stor nytta av förberedelsearbetet, även om högskolestudierna inleds med en repetitionskurs i matematik.

Lycka till

Med Hälsningar från de Tekniska Högskolorna

Tillägg av författaren

I detta kompendium behandlas i huvudsak de moment, som matematiklärare vid tekniska högskolor ansett vara de mest grundläggande delarna av gymnasiematematiken.

Den nuvarande gymnasiekursen i matematik är gemensam för alla skolor i landet, men olika skolor och lärare betonar kanske vissa delar mer eller mindre starkt. Därför kan några delar av kompendiet vara mer (eller mindre) välbekanta för dig.

Tips: Hoppa över avsnittet 3.4 om ellipser m.m., ifall dessa begrepp inte behandlats i din gymnasiekurs.

Observera också att kompendiet är avsett att väsentligen vara en repetition av matematiken i delarna A, B, C och D, som brukar genomgås de två första åren på gymnasiet. Däremot repeteras vanligen del E (med bl.a. tillämpning av integraler och differentialekvationer), samt en eventuell, frivillig del F, i samband med de ordinarie matematikkurserna på de tekniska högskolorna.

Lycka till!

Rolf Pettersson

Årets utgåva av "Matematik – kort förberedande kurs för blivande teknologer" är en grafiskt bearbetad upplaga av ett äldre, i huvudsak maskinskrivet, original. Jag har i samråd med författaren försökt ge häftet en så lättöverskådlig och pedagogisk utformning som möjligt, utan att förändra dess sakinnehåll nämnvärt. Eftersom jag själv är teknolog vid F-sektionen på Chalmers och därmed konfronterats en del med teknisk kurslitteratur, har jag strävat efter att ge häftet en utformning som i så hög grad som möjligt liknar teknologens "vardagslitteratur" – detta för att ge Dig en så smidig övergång som möjligt mellan gymansielitteraturen och de Tekniska Högskolornas.

Ett gott råd är dessutom att verkligen försöka lägga undan miniräknaren då Du räknar dig i igenom häftet. Enligt min egen erfarenhet, var detta en av de verkligt givande poängerna med att repetera gymnasiets matematik. Förståelsen för de grundläggande tekniska mattekurserna ökar enormt om många av detta häftes formler och samband sitter i "ryggmärgen".

Lycka till!

Lennart Jörelid

Innehåll

A. DIAGNOSTISKT PROV
(Lämplig tid: cirka 2 timmar)

(Svar finns på sista sidan i kompendiet)

[1] Förenkla $7a - 3 - [(3 - a) - 2(a - 3b)] - 4b$

[2] Lös ekvationen

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x} = 1$$

[3] Förenkla så långt som möjligt:

$$\frac{y \cdot \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}$$

[4] Förkorta (om möjligt) i uttrycket $(x^3 - 8)/(x^2 - 4)$

[5] Dividera (med polynomdivision) så långt som möjligt $(2x^3 + 1)/(x^2 - 2x + 3)$

[6] Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + 6y = 1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

[7] Bestäm exakt $\sqrt{(-6)^2} + 2\sqrt{9}$

[8] Bestäm rötterna till ekvationen $\quad 3 \cdot x^2 + 4x - 4 = 0$

[9] För vilka x gäller olikheten

$$\frac{x}{x-1} < 1 \quad ?$$

[10] Förenkla $\begin{array}{ll} [a] & 1/2 \cdot \ln 9 + \ln(1/6) \\ [b] & \ln(x^3)/\ln(1/x) \end{array}$

[11] Angiv exakta värdet av $\sin(\pi/3) + \tan(\pi/6)$ (samt förenkla).

[12] Bestäm alla vinklar v mellan 0° och 360° som satisfiera $\begin{array}{ll} [a] & \cos v = 1/2 \\ [b] & \sin v = -1/2 \end{array}$

[13] [a] I en rätvinklig triangel är *sinus* för en vinkel lika med 2/3 och den mot denna vinkel stående sidan är 3 längdenheter. Bestäm hypotenusans längd exakt.

[b] Samma uppgift som ovan, om i stället *tangens* för vinkeln är 2/3.

[14] Bestäm $\tan 2x$ exakt, om $\tan x = 1/4$.

[15] Angiv på formen $ax + by + c = 0$ en ekvation för räta linjen genom punkterna $(2, -3)$ och $(-1, 1)$.

[16] Ekvationen $x^2+y^2=6x$ betyder geometriskt en cirkel (i ett ortonormerat system). Bestäm medelpunkt och radie.

[17] Bestäm derivatan $f'(x)$ (och förenkla den), om

$$f(x) = \frac{5x^2+2x}{3x-1}$$

[18] Bestäm $f'(0)$, om $f(x) = e^{x^2}/e^{3x}$

[19] Bestäm på formen $ax+by+c=0$ en ekvation för tangenten till kurvan $y=(x-2x^2)^3$ i den punkt på kurvan, där $x=1$.

[20] Bestäm det största värde som $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$ kan anta för reella x.

1 Algebraiska räkningar

1.1 Addition, subtraktion och multiplikation av reella tal

För reella tal gäller bl.a. följande enkla räkneregler:

$$
\begin{aligned}
-(a+b) &= -a-b \\
-(a-b) &= -a+b=b-a \\
(-a)\cdot(-b) &= +ab=ab, \quad \text{ty} \\
(-1)\cdot(-1) &= +1
\end{aligned}
$$

Man definierar potenser med heltalsexponenter som:

$a^0 = 1$(för $a \neq 0$)
$a^1 = a, a^2 = a \cdot a$ osv
$a^n = a \cdot a \dots a,$ dvs. produkten av n stycken faktorer a

---

Varav följer **Potenslagarna**

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$(ab)^n = a^n b^n$

Eftersom $(-1)^2 = 1$ och $a-b = -(b-a)$, så gäller att $(a-b)^2 = (b-a)^2$, $(a-b)^3 = -(b-a)^3$, ovs. För att förtydliga ges nedan några exempel:

Exempel $4a - 2b - [(3a-c)-(2b-3c)] = 4a-2b-(3a-c-2b+3c) =$
$4a-2b-3a+c+2b-3c = a-2c$

Exempel $(xy^2z^3)^4 \cdot (-2x^2y)^3 = x^4y^8z^{12} \cdot (-8) \cdot x^6y^3 = -8x^{10}y^{11}z^{12}$

Övningsuppgifter

Ö-1 Förenkla

[1] $9y - 6x - z + x - 2y - 9x + 4z - y$
[2] $a - 3b - (2a - b - c)$
[3] $c - [(7a - c) - (b - 2c)] - 2b$

Ö-2 Beräkna

[1] 3^4
[2] 4^3
[3] $(-3)^2$
[4] $(-2)^3$
[5] $(-4)^0$

Ö-3 Förenkla

[1] $3ab^3 \cdot 8ab^2$
[2] $(5a^5b^2)^4$
[3] $x^3y^4 \cdot (-2y^2x^7) \cdot 3yx$
[4] $(-2x^2y^3z)^3 \cdot (3xz^2)^2 \cdot (-x^3y)^4$

Ö-4 Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

[1] $(a - b)(b + 3a)$
[2] $(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$
[3] $(3x^2 - 2x + 1)(2x^2 - x - 2)$

Följande viktiga formler bör man kunna utantill:

KVADRERINGSREGLERNA	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
KUBERINGSREGLERNA	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
KONJUGATREGELN	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) =$ $= (a-b)(a+b)$
FAKTORUPPDELNINGARNA	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

OBS! $a^2 + b^2$, $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$ kan ej faktoruppdelas med reella tal.

Exempel Utveckla $(2x + 3z^2)^3$.
Lösning:
$(2x + 3z^2)^3 = \{$kuberingsregeln med $a = 2x$ och $b = 3z^2\} =$
$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3z^2 + 3 \cdot 2x \cdot (3z^2)^2 + (3z^2)^3 =$
$8x^3 + 36x^2z^2 + 54xz^4 + 27z^6$

Exempel Faktoruppdela uttrycket $18a^4b^6c - 24a^3b^3c^2 + 8a^2c^3$.
Lösning:
$18a^4b^6c - 24a^3b^3c^2 + 8a^2c^3 = \{$alla gemensamma faktorer bryts ut$\} =$
$2a^2c \cdot (9a^2b^6 - 12ab^3c + 4c^2) = \{$kan kvadreringsregeln användas?$\} =$
$2a^2c \cdot \{(3ab^3)^2 - 2 \cdot 3ab^3 \cdot 2c + (2c)^2\} = \{$kvadreringsregeln$\} =$
$2a^2c \cdot (3ab^3 - 2c)^2$.

Exempel Faktoruppdela uttrycket $x^6 + 8y^3$.
Lösning:
$x^6 + 8y^3 = \{$Kan faktoruppdelningen för $a^3 + b^3$ användas?$\}$
$= (x^2)^3 + (2y)^3 = (x^2+2y)[(x^2)^2 - x^2 \cdot 2y + (2y)^2)] = (x^2+2y)(x^4 - 2x^2y + 4y^2)$

Övningsuppgifter

Ö-5 Utveckla

[1] $(x + 3y)^2$
[2] $(5 - 2x)^2$
[3] $(x^2 - 4y^3)^2$

Ö-6 Förenkla

[1] $(x - 2)(x + 2)$
[2] $(3a^2 + 2x)(3a^2 - 2x)$
[3] $(2x^2 + 3)(2x^2 - 3)(4x^4 + 9)$

Ö-7 Uteckla

[1] $(x + 2y)^3$
[2] $(a - 5b^2)^2$
[3] $(3a + 2b^4)^3$
[4] $(4x^2 - 6x)^3$

Ö-8 Uppdela i faktorer

[1] $x^2 - 9$
[2] $x^2 + 4x + 4$
[3] $4b^2 - 16a^2$

Ö-9 Uppdela i faktorer

[1] $3x^2 - 18xy + 27y^2$
[2] $x^6 - 81x^2$
[3] $x^2y^3 + 4x^4y - 4x^3y^2$

Ö-10 Uppdela i faktorer

[1] $x^3 + 27$
[2] $yz^6 - y^4$
[3] $x^6 + 8x^3y^9$

Polynom; Kvadratkomplettering

Med ett *polynom* (i x) menas ett uttryck av formen

$$p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$$

där $a_n, \ldots, a_0$ kallas *koefficienter* för $x^n, \ldots, x^0$. Om $a_n \neq 0$ säges $p(x)$ vara av *grad* n. Ett viktigt begrepp är *kvadratkomplettering* i andragradspolynom (jämför detta med lösning av andragradsekationer [1.7]). Kvadratkompletteringen ges av:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - (\frac{p}{2})^2$$

Exempel Bestäm (genom kvadratkomplettering) minsta värdet av
$f(x) = 4x^2 + 12x + 17$
Lösning:

$f(x) = 4[x^2 + 3x] + 17 = \{$kvadratkomplettera$\} =$
$= 4\big[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2\big] + 17 = 4[(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}\big] + 17 = 4(x + \frac{3}{2})^2 + 8$

Eftersom $(x + \frac{3}{2})^2 \geq 0$ för alla x, med likhet om och endast om $x = -\frac{3}{2}$, inser man att $f_{\text{min}} = 8$, vilket inträffar då $x = -\frac{3}{2}$.

Övningsuppgifter

Ö-11 Kvadratkomplettera

[1] $x^2 + 2x - 1$
[2] $5 + 2x - x^2$
[3] $2y^2 - 8y + 3$
[4] $7 - 10y - 4y^2$
[5] $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 1$

Ö-12 Kvadratkomplettera

[1] $x^2 + 3x + 4$
[2] $1 - x - x^2$
[3] $16x^2 + 9 - 24x$
[4] $x^4 - 2x^2 + 2$
[5] $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z$

Ö-13 Bestäm (genom kvadratkomplettering) minsta värdet av:

[1] $x^2 + 4x - 1$
[2] $5x^2 - 10x + 21$
[3] $x^2 + x + 1$

Ö-14 Bestäm största värdet av

[1] $5 + 2x - x^2$
[2] $7 - 10x - x^2$
[3] $7 - 10x - 4x^2$

1.2 Division av reella tal. Bråkräkning

Enligt definitionen på bråk har förstagradsekvationen $b \cdot x = a$ den entydiga lösningen $x = \frac{a}{b}$ (kan också skrivas a/b) för $b \neq 0$. För bråkräkning gäller bl.a. följande regler:

Förkortning och förlängning:	$\dfrac{c \cdot a}{c \cdot b} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$ (för $c \neq 0$)
Multiplikation:	$a \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{a}{c} \cdot b$ och $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
Division, dubbelbråk:	$\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$
Addition, subtraktion:	$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \dfrac{b \cdot c}{b \cdot d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$

OBS! $\frac{1}{a+b}$ är ej lika med $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. (Alltför vanligt fel att tro motsatsen.) Om t.ex. $a = b = 1$, är nämligen $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{2}$, medan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$!

Potenser med negativa exponenter definieras som

Definition

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

varav följer

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Exempel Förenkla uttrycket: $\frac{(a-b)^5}{(b-a)^7}$.
Lösning:

$$\frac{(a-b)^5}{(b-a)^7} = \frac{(-1)^5(b-a)^5}{(b-a)^7} = \frac{-1}{(b-a)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}$$

Exempel Skriv

$$R(x) = \frac{1}{x^2+2x} + \frac{x+1}{4-x^2} + \frac{1}{2x^2}$$

som ett bråk (på så enkel form som möjligt),
Lösning:

$$R(x) = \frac{1}{x^2+2x} + \frac{x+1}{4-x^2} + \frac{1}{2x^2} = \{\text{Faktoruppdela nämnarna}\}$$

$$\frac{1}{x(x+2)} - \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{2x \cdot x} =$$

$= \{$Förläng de olika bråken, så att de nya bråken får samma nämnare.

Vi har minsta gemensamma nämnare $MGN = 2x^2(x+2)(x-2)\} =$

$$= \frac{2x(x-2)\cdot 1}{2x(x-2)\cdot x(x+2)} - \frac{2x^2\cdot(x+1)}{2x^2\cdot(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x+2)\cdot 1}{(x-2)(x+2)\cdot 2x^2} =$$

$$= \frac{2x(x-2) - 2x^2(x+1) + (x+2)(x-2)}{2x^2(x+2)(x-2)} = \frac{-2x^3+x^2-4x-4}{2x^2(x^2-4)}$$

Anmärkning: Man kan också (i ovanstående exempel) först addera två av bråken och sedan till summan addera det tredje bråket. Genomför dessa räkningar!

Övningsuppgifter

Ö-15 Beräkna

[1] $\frac{4}{3} - \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{4} - \frac{13}{6})$
[2] $(\frac{1}{12} + \frac{1}{6})/(\frac{5}{8} - \frac{5}{6})$

Ö-16 Beräkna

[1] 2^{-3}
[2] $(1/3)^{-2}$
[3] $(-5)^{-3}$

Ö-17 Skriv som potens av 2

[1] $1/32$
[2] $128/2^8$
[3] $8^5/4^3$

Ö-18 Förenkla

[1] $(30x^4y^7)/(12xy^{10})$
[2] $(3a^3b^4 + 6ab^2)/(3ab^2)$
[3] $(10y^2z^3 + 5zy - 15z^2y)/(5yz)$

Ö-19 förenkla

[1] $(a-b)/(b-a)$
[2] $(a-b)^2/(b-a)^2$
[3] $(a-b)^2/(b-a)$
[4] $(b-a)^2/(a-b)^3$
[5] $(a-b)^5/(b-a)^3$

Ö-20 Förkorta (om möjligt)

[1] $(a^2 + ab)/(a^2 - b^2)$
[2] $(4x^2 - x^4)/(x^2 - 4x + 4)$
[3] $(x^3 - 1)/(x^3 + x^2 + x)$

Ö-21 förenkla

[1] $(1/x)/y - (1/y)/x + 1/(2y/x) +$
$2/(x/y)$
[2] $(a/b + b/a + 2)/(1/b - b/a^2)$

Ö-22 Lös ekvationen

[1] $2x/7 + 3/4 = 11/8$

[2] $(5x+7)/(4x-14) - 1/3 =$
$(3x+11)/(2x-7)$

Ö-23 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt):

[1] $x/(x-1) - 1/(x+1)$
[2] $x + 2/(x-1) + (x+2)/(x^2+x+1)$
[3] $1/(1-2x) - 2/(1+2x) +$
$+ (6x+2)/(4x^2-1)$

Ö-24 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt):

[1] $1/(2x-2) - 1/(2x)$
[2] $x^2/(3-x) + (2-x)/(3+x)$
[3] $(x+1)/(2x^2-8) - (3x-1)/(4x^2+8x)$

Rationella uttryck, Polynomdivision

Ett *rationellt uttryck* (i x) kan skrivas på formen $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom och $q(x) \neq 0$, dvs $q(x)$ ej identiskt noll. Om nu gradtalet för $p(x)$ är större än eller lika med gradtalet för $q(x)$, kan $p(x)$ divideras med $q(x)$, så att gradtalet för *restpolynomet* $r(x)$ blir mindre än gradtalet för $q(x)$. Man får $\boxed{\dfrac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}}$, där $k(x)$ kallas *kvotpolynom*. Polynomen $k(x)$ och $r(x)$ kan bestämmas med en *polynomdivisionsalgoritm* (se följande exempel)

Exempel Dividera $(3x^3 + x^2 + 4x - 3)/(x^2 - 3x + 1)$ så långt som möjligt.
Lösning: Skriv upp täljaren $p(x)$ och nämnaren $q(x)$ med "trappan" (eller "liggande stolen"):

$$\begin{array}{llrl}
 & & \overline{3x+10} & (= k(x)) \\
(q(x) =) & \underline{x^2 - 3x + 1} & |3x^3 + x^2 + 4x - 3 & (= p(x)) \\
 & & \underline{-(\,3x^3 - 9x^2 + 3x)} & \\
 & & 10x^2 + x - 3 & \\
 & & \underline{-(10x^2 - 30x + 10)} & \\
 & & 31x - 13 & (= r(x))
\end{array}$$

Metod: Dividera högstagradstermen $3x^3$ i $p(x)$ med högstagradstermen x^2 i $q(x)$, dvs bilda $3x^3/x^2 = 3x$, som blir första termen i kvoten $k(x)$. Multiplicera sedan hela nämnaren $q(x)$ med $3x$ och subtrahera från $p(x)$. Fortsätt med att dividera högstagradstermen $10x^2$ i resten med högstagradstermen i $q(x)$, dvs bilda $10x^2/x^2 = 10$, som blir nästa term i $k(x)$. Multiplicera och subtrahera som ovan. Fortsätt tills gradtalet i restpolynomet $r(x)$ är strängt mindre än gradtalet för $q(x)$.
Svar:

$$\frac{3x^3 + x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x + 1} = 3x + 10 + \frac{31x - 13}{x^2 - 3x + 1}$$

Övningsuppgifter

Ö-25 Dividera så långt som möjligt:

[1] $(x^2 + x + 1)/(x - 1)$
[2] $(x^2 - 1)/(x^2 + 1)$
[3] $(x^3 - 5x + 1)/(x + 2)$

Ö-26 Dividera så långt som möjligt:

[1] $(6x^2 - 7x + 2)/(2x - 1)$
[2] $(1 - x^3)/(2x^2 + x - 1)$
[3] $(3x^5 + 2x^2 + 4)/(x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$

1.3 Lineära ekvationssystem

Vid lösning av ekvationer med flera obekanta söker man genom *elimination* skaffa sig en ekvation, som innehåller endast en obekant. Man kan använda sig av en av två metoder – substitutionsmetoden eller additionsmetoden. För att illustrera, ges nedan ett exempel: (Tecknet "⇔" betyder "om och endast om")

Exempel Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

Lösning: Metod 1 [Substitutionsmetoden]

Den första ekvationen ger $x = (4-5y)/2$, som man sätter in i den andra. Då erhålles

$$\begin{aligned} &3(4-5y)/2 + 2y = -5 \Leftrightarrow 12 - 15y + 4y = -10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -11y = -22 \Leftrightarrow \boxed{\text{y=2}} \end{aligned}$$

Alltså är $x = (4-5y)/2 = (4-10)/2 = -3$, och man får ett

Svar: $x = -3, y = 2$

Lösning: Metod 2 [Additionsmetoden]

Multiplicera (för att eliminera x) båda leden i de givna ekvationerna med 3 resp. (-2) och addera dem:

$$\begin{array}{r} 6x + 15y = 12 \\ -6x - 4y = 10 \\ \hline 11y = 22 \end{array}$$

Härav fås $\boxed{\text{y=2}}$, som insatt i en av de givna ekvationerna ger $x = -3$.

OBS! Kontrollera alltid svaret genom insättning i de givna ekvationerna!

Anmärkning: Den lineära ekvationen $ax + by = c$ betyder geometriskt en rät linje. Ett system av sådana ekvationer har alltså a) en b) ingen eller c) oändligt många lösningar beroende på om de räta linjerna är a) skärande b) parallella (och olika) c) sammanfallande.

Övningsuppgifter

Ö-27 Lös ekvationssystemet

[1] $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

[2] $\begin{cases} x - y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

[3] $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$

Ö-28 Lös ekvationssystemet

[1] $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 6x + 4y = 4 \end{cases}$

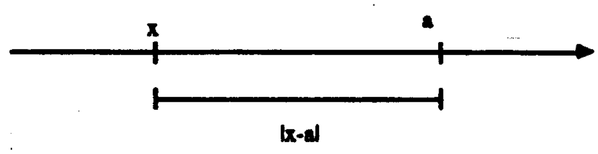
[2] $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

[3] $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + 3z = -6 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

1.4 Absolutbelopp

DEFINITION $$|x| = \begin{cases} x & \text{om} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}$$

Alltså är $|x| \geq 0$ för alla x och om $|x| = a$ så är $x = \pm a$. Geometriskt kan $|x - a|$ uppfattas som avståndet mellan punkterna x och a på tallinjen.



Exempel Enligt definitionen är $|-2| = -(-2) = +2$, ty $x = -2 < 0$.

Exempel Exvationen $|x - 1| = 3$ kan skrivas $x - 1 = \pm 3$, varför rötterna är $x_1 = 1 + 3 = 4$, och $x_2 = 1 - 3 = -2$.

Exempel Olikheten $|x + 2| < 5$ kan även skrivas $-5 < x + 2 < 5$, dvs $-7 < x < 3$.

Studera tallinjen!

Övningsuppgifter

Ö-29 Bestäm
[1] $|5|$
[2] $|-5|$
[3] $|6 - 8|$
[4] $|2 - 3.5|$
[5] $|-6 - 8|$

Ö-30 Lös ekvationerna
[1] $|x - 1| = 2$
[2] $|x + 3| = 5.5$
[3] $|2 - x| = 2$
[4] $|x + 1| = 1/3$
[5] $|x + 2| = -2$
[6] $|3x - 5| = 1$

Ö-31 Angiv utan absolutbelopp de x, som satisfiera:
[1] $|x| < 4$
[2] $|x - 2| \leq 3$
[3] $|3x + 2| < 1$
[4] $1 < |x + 2| \leq 3$

Ö-32 Skriv $f(x)$ utan absolutbelopp, om $f(x)$ är:
[1] $x + |x|$
[2] $2x - |x|$
[3] $|x + 1| + |x - 2|$
[4] $4|3x - 1| + |6x + 3|$

1.5 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom $x^2 = x \cdot x \geq 0$ för alla *reella* tal x har ekvationen $x^2 = b$ reella lösningar endast om $b \geq 0$.

DEFINITION Med $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal vars kvadrat är b. Alltså är $(\sqrt{b})^2 = b$ för $b \geq 0$.

OBS! $\sqrt{b} > 0$ för $b > 0$. Exempelvis är $\sqrt{16} = +4$ och *inte* ± 4.
(Mycket vanligt fel att tro motsatsen!)
Av definitionen på $\sqrt{b}$ följer vissa räkneregler:

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$ för a och $b > 0$.
2. $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, varför $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$, alla a.
3. $1/\sqrt{b} = \sqrt{b}/b$ för $b > 0$.
4. $\begin{cases} 1/(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})/(a-b) \\ 1/(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})/(a-b) \end{cases}$
   för a och $b > 0$ och $a \neq b$.

Reglerna 4 kallas *förlängning med konjugatuttryck*. (se exempel nedan.)
OBS! I allmänhet är $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exempel Förenkla $\sqrt{(-2)^2}$.
Lösning:
Enligt räkneregel 2 ovan, är $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.
En alternativ lösningsmetod är $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Exempel Skriv med heltalsnämnare $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$
Lösning:
Förläng med konjugatet till nämnaren:

$$\frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{9-5} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

Exempel Förenkla $\frac{1-x}{\sqrt{x-1}}$ och ange definitionsmängd.
Lösning:
$\sqrt{x-1}$ är definierat för $x \geq 1$, men $1/\sqrt{x-1}$ endast för $x > 1$. För $x > 1$ är:

$$\frac{1-x}{\sqrt{x-1}} = \frac{-(x-1)}{\sqrt{x-1}} = -\frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}} = -\sqrt{x-1}$$

Svar: För $x > 1$ är $\frac{1-x}{\sqrt{x-1}} = -\sqrt{x-1}$

Övningsuppgifter

Ö-33 Förenkla

[1] $\sqrt{9}$
[2] $\sqrt{3^2}$
[3] $\sqrt{(-3)^2}$

Ö-34 Förenkla

[1] $\sqrt{0.16}$
[2] $\sqrt{6250000}$
[3] $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$

Ö-35 Förenkla

[1] $\sqrt{18}/\sqrt{96}$
[2] $\sqrt{2} + \sqrt{8}$
[3] $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$
[4] $\sqrt{12} + \sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$

Ö-36 Skriv med heltalsnämnare:

[1] $2/\sqrt{14}$
[2] $1/(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
[3] $1/(1 + \sqrt{6})$
[4] $(4 - \sqrt{5})/(7 - \sqrt{5})$
[5] $1/[(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}]$
[6] $1/(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$

Ö-37 Förenkla

[1] $\sqrt{a^2 \cdot b}$, om $a > 0$ och $b > 0$
[2] $\sqrt{a^2 \cdot b}$, om $a < 0$ och $b > 0$
[3] $a \cdot \sqrt{b/a}$, om $a > 0$ och $b > 0$
[4] $a \cdot \sqrt{b/a}$, om $a < 0$ och $b < 0$

Ö-38 Förenkla följande uttryck (och angiv definitionsmängd):

[1] $(x + 2)/\sqrt{x + 2}$
[2] $(5 - x)/\sqrt{x - 5}$
[3] $(x^2 - 4x)/\sqrt{4 - x}$
[4] $(1 - x)/\sqrt{x^3 - x^2}$
[5] $(x^2 + x)/\sqrt{x^3 + x^2}$
[6] $x/(\sqrt{x + 1} - 1)$
[7] $(2 - x - x^2)/(x + \sqrt{2 - x})$

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika reella *rötter* $x_1 = \sqrt{b}, x_2 = -\sqrt{b}$. Man skriver

$$x^2 = b \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{b} \text{ för } b \geq 0$$

OBS!

$$x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$$

$$\begin{cases} p = \sqrt{q} & \Rightarrow \quad p^2 = q \text{ men} \\ p^2 = q & \Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{q} \end{cases}$$

Exempel Ekvationen $9x^2 - 2 = 0$, dvs $x^2 = 2/9$ har rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}/3$.

Exempel Ekvationen $1 + \sqrt{x} = 0$, dvs $\sqrt{x} = -1$ saknar lösning, ty $\sqrt{x} \geq 0$.

Övningsuppgifter

Ö-39 Lös ekvationen

[1] $x^2 = 4$
[2] $x^2 - 27 = 0$
[3] $4 - 3x^2 = 0$

Ö-40 Lös ekvationen

[1] $\sqrt{x} = 4$
[2] $\sqrt{x+1} = 2$
[3] $\sqrt{x} + 2 = 0$
[4] $\sqrt{x^2+1} = 2$
[5] $\sqrt{x^2+2} = 1$
[6] $\sqrt{x^2+4x-9} = 2\sqrt{x}$

1.6 Icke-reella tal. Komplexa tal

Ekvationen $x^2 = b$ saknar *reella* rötter om $b = -c < 0$. Däremot har den icke-reella (imaginära) rötter: $x_1 = i\sqrt{c}, x_2 = -i\sqrt{c}$, där $i^2 = -1$. Man kan nu (något oegentligt) skriva:

$$x^2 = -c \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-c} = \pm i\sqrt{c}; \quad c > 0$$

Exempel Ekvationen $x^2 + 3 = 0$, dvs $x^2 = -3$ har rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, dvs

$$\begin{cases} x_1 = i\sqrt{3} \\ x_2 = -i\sqrt{3} \end{cases}$$

Ett *komplext* tal kan skrivs på formen $u + iv$, där u och v är reella tal och i är den *imaginära enheten*, som satisfierar ekvationen $i^2 = -1$.

Exempel

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \{\text{Konjugatregeln}\} = \frac{2-3i}{4-9i^2} = \frac{2-3i}{13}$$

Övningsuppgifter

Ö-41 Lös ekvationen

[1] $x^2 = -9$
[2] $x^2 + 4 = 0$
[3] $16x^2 + 25 = 0$
[4] $(x-1)^2 = -3$
[5] $(x+3)^2 + 10 = 0$

Ö-42 Skriv på formen $u + iv$

[1] $(1+3i) - (2-i)$
[2] $(1+3i)(2-i)$
[3] $(1+3i)/(2-i)$
[4] $1/(1+3i) + 1/(2-i)$

1.7 Andragradsekvationer. Faktoruppdelning av andragradspolynom

En adragradsekvation $ax^2 + bx + c = 0$ kan, då $a \neq 0$, skrivas på *normalform*: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.
En andragradsekvation på normalform, $x^2 + px + q = 0$, kan lösas genom *kvadratkomplettering*:

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Alltså gäller att:

> Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna
>
> $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Dessa rötter x_1 och x_2 är

[1] Reella och olika, om $(p/2)^2 - q > 0$

[2] Reella och lika, om $(p/2)^2 - q = 0$

[3] Icke-reella och olika, om $(p/2)^2 - q < 0$

OBS! Om $q = 0$, har ekvationen $x^2 + px = 0$ en rot $x_1 = 0$, samt roten $x_2 = -p$.

Exempel Beräkna rötterna till ekvationen $3 - 5x^2 = 2x$.
Lösning:
Ekvationen kan skrivas på normalform: $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0$, och har rötterna

$$x_{1,2} = -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{15}{25}} = -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5}$$

Alltså är rötterna $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -1 \end{cases}$

Exempel Ekvationen $x^2 - 6x + 13 = 0$ har rötterna

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$$

OBS! Kontrollera alltid svaret genom insättning i den givna ekvationen!

Övningsuppgifter

Ö-43 Bestäm rötterna till ekvationerna

[1] $x^2 + 6x + 5 = 0$
[2] $x^2 = x + 6$
[3] $2x^2 + 3 + 5x = 0$
[4] $11x^2 = 3x$
[5] $3x^2 + 5x - 1 = 0$
[6] $9x^2 + 1 - 6x = 0$
[7] $6 + 3x - 4x^2 = 0$

Ö-44 Lös ekvationerna, dvs bestäm alla rötter:

[1] $x^2 - 4x + 6 = 0$
[2] $x^2 + x + 1 = 0$
[3] $2x^2 + 5 = 3x$
[4] $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ (Sätt här $x^2 = z$)
[5] $3 + 2x^2 = x^4$

Faktoruppdelning (av andragradspolynom)

Om ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna x_1 och x_2, så kan *polynomet* $x^2 + px + q$ faktoruppdelas:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Anmärkning: Om $(p/2)^2 - q < 0$, så är x_1 och x_2 icke-reella och i så fall kan $x^2 + px + q$ ej faktoruppdelas med reella tal. (Därmot kan $x^2 + px + q$ alltid faktoruppdelas med *komplexa* tal.)

Exempel Faktoruppdela polynomet $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Lösning:

$2x^2 - x - 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$. Lös därför först ekvationen $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Man får

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

Rötterna är alltså $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$

Alltså är $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x + \dfrac{1}{2})$, varför

$$P(x) = 2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1)$$

Övningsuppgifter

Ö-45 Faktoruppdela (med reella tal):

[1] $x^2 + 3x - 4$
[2] $6 - 2x - 4x^2$
[3] $x^2 + 2x + 2$
[4] $8x - 8x^2 - 2$
[5] $2x^2 - 6x + 1$

Ö-46 Angiv en andragradsekvation med rötterna:

[1] 1 och -2
[2] $2 + \sqrt{3}$ och $2 - \sqrt{3}$
[3] $1 + i$ och $1 - i$

1.8 Faktorsatsen. Ekvationer av större gradtal än två

Sats

Faktorsatsen

Om $p(x)$ är ett *polynom* i x och $p(x_1) = 0$, dvs om x_1 är en *rot* till polynomekvationen $p(x) = 0$, så är $(x - x_1)$ en *faktor* i $p(x)$, dvs

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x)$$

där $q(x)$ är ett polynom av en enhet lägre grad än $p(x)$.

Exempel Lös ekvationen $x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = 0$.
Lösning:
Efter prövning (av t.ex. $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) finner man att $x_1 = -1$ är en rot, ty $-1 - 11 - 23 + 35 = 0$. Enligt faktorsatsen är alltså polynomet $x^3 - 11x^2 + 23x + 35$ delbart med $x - x_1 = x - (-1) = x + 1$. Division (av polynom, se 1.2) ger

$$x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x + 1)(x^2 - 12x + 35)$$

Tredjegradsekvaitonens övriga rötter fås ur ekvationen $x^2 - 12x + 35 = 0$. Man får alltså $x_{2,3} = 6 \pm \sqrt{36 - 35} = 6 \pm 1$, dvs $x_2 = 5$ och $x_3 = 7$.
Svar: Ekvationen har fötterna $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ och $x_3 = 7$.

Tillägg: Vi har alltså faktoruppdelningen $x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x + 1)(x - 5)(x - 7)$.

OBS! En tredjegradsekvation har alltid tre rötter (lika eller olika)

Övningsuppgifter

Ö-47 Lös ekvationerna

[1] $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$
[2] $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$
[3] $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$
[4] $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$

Ö-48 Faktoruppdela (med reella tal):

[1] $x^3 + 2x^2 - 8x$
[2] $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
[3] $x^3 + 4x^2 + 6x + 4$
[4] $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$

Ö-49 Lös ekvationerna

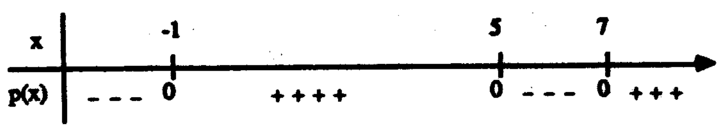
[1] $(x-1)^4 = 0$
[2] $x^4 - 1 = 0$
[3] $(x^2 - 1)^2 = 0$

Ö-50 Faktoruppdela

[1] $2(x^3 - x^2 + x - 1)$
[2] $2x^3 - 17x^2 + 41x - 30$
[3] $x^3 + x^2 - 6x - x^2y - xy + 6y$

1.9 Olikheter

Exempel För vilka x är $x^3 + 23x < 11x^2 - 35$?
Lösning:
Olikheten kan skrivas $p(x) = x^3 - 11x^2 + 23x + 35 < 0$. (Ha alltid för vana att flytta över termer, så att ena ledet blir noll.) Enligt exempel ovan har vi faktoruppdelningen $p(x) = (x+1)(x-5)(x-7)$. Teckenstudium ger nu:

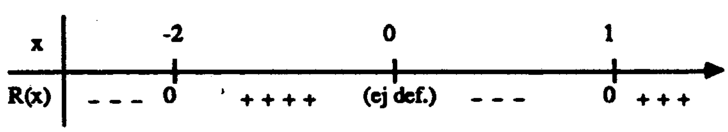


Svar: Olikheten gäller för $x < -1$ och för $5 < x < 7$.

Exempel För vilka x är $x + 1 \geq \frac{2}{x}$?
Lösning:
Olikheten kan skrivas $R(x) = x + 1 - \frac{2}{x} \geq 0$, där

$$R(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x} \overset{*}{=} \frac{(x+2)(x-1)}{x}$$

I * har vi endast faktoruppdelat täljaren. Teckenstudium av $R(x)$ ger nu:



Svar: Olikheten gäller för $-2 \leq x < 0$ och för $x \geq 1$.

OBS! Den givna olikheten (i senaste exemplet) får *ej* skrivas $x(x+1) \geq 2$, dvs olikheten får ej multipliceras med x, ty x kan vara negativt!

Allmänt gäller att $\begin{cases} a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c, \quad \text{om} \quad c > 0 \\ a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \quad \text{om} \quad c < 0 \end{cases}$

Ö-51 För vilka x gäller följande olikheter?

[1] $x^2 > (x+2)^2$
[2] $3x^2 \leq 2x$
[3] $x^2 + x \geq 2$
[4] $x^2 + 1 \geq x$
[5] $x^3 + 6 < 2x^2 + 5x$
[6] $6 + 3x^2 \leq 5x + x^3$

Ö-52 För vilka x gäller följande olikheter?

[1] $(x+1)/x \geq 3$
[2] $(2x-1)/(x-2) \leq 3$
[3] $1/x \geq 2x - 1$

1.10 n:te roten ur ett reellt tal. Allmänna potenser

Med $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ menas den reella (och positiva, om $n = 2m =$ jämnt heltal) roten till ekvationen $x^n = b$. Alltså är $(b^{\frac{1}{n}})^n = b$, dvs $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

För den vanliga *kvadratroten* gäller alltså att $\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{1/2}$ för $b \geq 0$. Om $b > 0$ definieras *potensuttrycket* $b^{m/n}$ (med rationell exponent (m/n)) genom $b^{(m/n)} = \sqrt[n]{b^m}$. Man kan visa att $b^{(m/n)}$ satisfierar (de allmänna) potens- och exponentiallagarna:

Potens- och exponentiallagarna

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$
$$(b^x/b^y) = b^{x-y}$$
$$(b^x)^y = b^{x \cdot y}$$

$$\begin{cases} (ab)^x = a^x \cdot b^x \\ (a/b)^x = a^x/b^x \end{cases}$$

Anmärkning: Den andra lagen ger speciellt $1/b^y = b^{-y}$, om $x = 0$.

Exempel Förenkal $\sqrt[6]{2\sqrt{2}}$.
Lösning:

$$\sqrt[6]{2\sqrt{2}} = (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

Ö-53 Förenkla

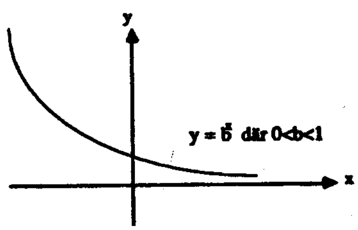
[1] $8^{1/6}$
[2] $4^{-1.5}$
[3] $(\sqrt{27})^{4/3}$
[4] $9^{-1/6} \cdot 9^{0.5}$
[5] $(32)^{-1.5}/4^{-4.5}$

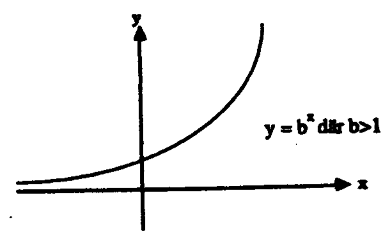
Ö-54 Förenkla

[1] $\sqrt[4]{9}$
[2] $\sqrt[12]{8}$
[3] $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$
[4] $\sqrt[4]{\sqrt[7]{9}}$
[5] $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{6}}}$

Man kan allmänt definiera *uttrycket* b^x för $b > 0$ och alla reella x, så att b^x satisfierar potenslagarna ovan. b^x kallas for en *potens* av b, där b kallas *bas* och x *exponent*. Av speciellt intresse är den (naturliga) exponentialfunktionen e^x med basen $e = 2,71828\ldots$. För allmänt b^x gäller bl.a. att

> [1] $b^x > 0$ för alla x.
>
> [2] $b^0 = 1$ för alla b.
>
> [3] $f(x) = b^x$ är växande (för växande x) om $b > 1$, och avtagande (för växande x) om $0 < b < 1$.





OBS! Man skiljer på a) *potensfunktionen* $f(x) = x^b$ och b) *exponentialfunktionen* $f(x) = b^x$.

Exempel Lös ekvationen $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21$.
Lösning:
Ekvationen $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21$ kan skrivas $3^x \cdot (1 + 2 \cdot 3) = 21$, dvs $3^x \cdot 7 = 21$ eller $3^x = 3$, varför $\boxed{x = 1}$.

Exempel Lös ekvationen $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.
Lösning:
Sätt $e^x = z$. Då erhålles andragradsekvationen $z^2 + 2z - 3 = 0$ med rötterna $z_1 = 1$ och $z_2 = -3$. Man får nu två fall:
[1] $e^x = z_1 = 1$ ger $x_1 = 0$.
[2] $e^x = z_2 = -3$ är en orimlighet, eftersom $e^x > 0$ för alla reella tal x.
Svar: $x = 0$

Övningsuppgifter

Ö-55 Bestäm reella lösningar till

[1] $3^x = 81$
[2] $3^{x+1} + 3^x = 36$
[3] $9^x = 1/27$
[4] $3 \cdot 2^{x+1} - 2^x = 40\sqrt{2}$
[5] $2^{x+2} + 3 \cdot 2^x = 3.5$

Ö-56 Bestäm reella lösningar till

[1] $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ (Sätt $e^x = z$)
[2] $e^{2x} + e^x + 1 = 0$
[3] $3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$
[4] $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

1.11 Logaritmer

För *tio-logaritmen* $\lg y$ och *naturliga logaritmen* $\ln y$ gäller

$x = \lg y \Leftrightarrow y = 10^x$, för $y > 0$

$x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x$, för $y > 0$

OBS! För att $\lg y$ resp. $\ln y$ skall vara definierat krävs alltså att $y > 0$. Speciellt är

$$\lg 1 = 0,\ \lg 10 = 1, \ln 1 = 0, \ln e = 1,$$
ty tex $y = 1 = 10^\circ = 10^x \Leftrightarrow \lg 1 = \lg y = x = 0.$

Av formlerna ovan följer också direkt att

$\lg 10^x = x$ och $\ln e^x = x$ för alla reella x.

$10^{\lg y} = y$ och $e^{\ln y} = y$ för alla $y > 0$.

Exempel $\lg 1000 = \lg 10^3 = 3$

Exempel $\lg 0.1 = \lg 10^{-1} = -1$

Exempel $\ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2} = 1/2$

Exempel Lös ekvationerna
[1] $2 \cdot \ln x = 3$
[2] $2 \cdot e^x = 3$

Lösning:

[1] $2 \cdot \ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = 1.5 \Leftrightarrow x = e^{1.5} = e\sqrt{e}$
[2] $2 \cdot e^x = 3 \Leftrightarrow e^x = 1.5 \Leftrightarrow x = \ln 1.5 \approx 0.406$

Övningsuppgifter

Ö-57 Förenkla

[1] $\lg 10000$
[2] $\lg 0.001$
[3] $10^{\lg 3.7}$
[4] $10^{-\lg 0.4}$

Ö-58 Förenkla

[1] $\ln e^3$
[2] $\ln \sqrt[3]{e}$
[3] $\ln(1/\sqrt{e})$
[4] $e^{\ln 5}$
[5] $e^{-\ln 1.5}$

Ö-59 Lös ekvationerna

[1] $\lg x = 0$
[2] $\ln x = -1$
[3] $4 \cdot \lg x = 1$

Ö-60 Bestäm reella lösningar till:

[1] $e^x = 4$
[2] $3 \cdot 10^x = 4$
[3] $2 \cdot 10^x + 10^{x+1} = 36$
[4] $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
[5] $2 \cdot 10^{2x} - 10^x - 6 = 0$

Ur potenslagarna kan man härleda följande *logaritmlagar* (för y och $z > 0$):

Sats

Logaritmlagarna

[1] $\ln(y \cdot z) = \ln y + \ln z$
[2] $\ln \frac{y}{z} = \ln y - \ln z$
[3] $\ln y^p = p \cdot \ln y$

Motsvarande lagar gäller också för tio-logaritmen, $\lg$.

Av lag 2 följer speciellt att

$$\ln \frac{1}{z} = -\ln z$$

OBS! $\ln(y+z)$ är *inte* lika med $\ln y + \ln z$. (Mycket vanligt fel att tro motsatsen!)

Exempel Lös ekvationen $2 \cdot \lg x - 3 \cdot \lg 2 = -1$

Lösning:

För att $\lg x$ skall vara definierat krävs att $x > 0$. För $x > 0$ gäller enligt logaritmlagarna, att

$$2 \cdot \lg x - 3 \cdot \lg 2 = -1 \Leftrightarrow \lg x^2 - \lg 2^3 = -1 \Leftrightarrow \lg\left(\frac{x^2}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{8} = 10^{-1} \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} (\text{ty } x > 0)$$

Svar: $x = 2\sqrt{5}/5$.

Övningsuppgifter

Ö-61 Förenkla

[1] $\lg 80 - \lg 8$
[2] $\ln 48 + 6 \cdot \ln 1 - 3 \cdot \ln 2$
[3] $\lg 8 - 6 \cdot \lg \sqrt{2}$
[4] $\ln(1/9) + \ln \sqrt{27}$
[5] $2 \ln 24 + 3 \ln \frac{1}{4} + 5 \ln 9 - 4 \ln 27$
[6] $2\lg 0.12 - 1.5\lg 4 - \lg 1.8 + 10\lg 1$

Ö-62 Sök reella lösningar till ekvationerna

[1] $\ln x + 2 \cdot \ln 3 = \ln 5$
[2] $2\lg x + \lg 4 = 2$
[3] $3 \ln(x+1) - \ln x^3 = 6 \ln 4$
[4] $\ln(x-2) + \ln x = 3 \ln 2$
[5] $\ln(x+1) + \ln(2-x) = \ln(x-1)^2$
[6] $\lg(3x) + \lg(x+1) = 2\lg(x-1)$

2 Trigonometri

2.1 Vinkelmätning

Vinklar kan mätas i (delar av) varv, grader eller radianer. Med 1 radian menas storleken av centrumvinkeln i en cirkelsektor, där periferibågen är lika lång som cirkelns radie. (Rita en figur!)

Sambanden mellan de olika enheterna är: 1varv $= 360° = 2\pi$ radianer. Härav fås:

$1° = \pi/180$ radianer och
1 radian= $180°/\pi \approx 57.3°$

(Ofta skriver man inte ut enheten radian, utan skriver t.ex. $90° = \pi/2$.)

Övningsuppgifter

Ö-63 Bestäm grader och radianer för

[1] $1/4$ varv
[2] $2/3$ varv

Ö-64 Bestäm grader och radianer för

[1] $-1/2$ varv
[2] -5 varv (Rita figur!)

Ö-65 Omvandla till radianer

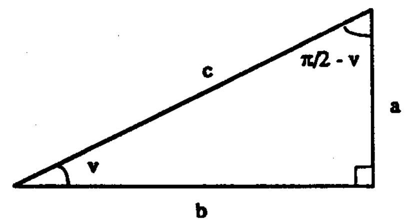
[1] $45°$
[2] $75°$
[3] $-60°$
[4] $210°$

Ö-66 Omvandla till grader

[1] $\pi/6$
[2] $-\pi/8$
[3] $23\pi/12$
[4] -5π

2.2 Rätvinkliga trianglar

I en rätvinklig triangel är en vinkel $90° = \pi/2$ (radianer). Om en av de övriga vinklarna är v, blir den tredje vinkeln $\pi/2 - v$, eftersom vinkelsumman i en triangel är $180° = \pi$. Vinkeln $\pi/2 - v$ kallas *komplementvinkeln* till v. Den sida som står mot den räta vinklen kallas *hypotenusa* och de båda övriga sidorna kallas *kateter*.



För rätvinkliga trianglar gäller Pythagoras sats:

Sats

Pythagoras sats

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De trigonometriska funktionerna definieras (för $0 < v < \pi/2$):

DEFINITION

$\sin v = (a/c) =$ (motstånende katet)/(hypotenusa)
$\cos v = (b/c) =$ (närliggande katet)/(hypotenusa)
$\tan v = (a/b) =$ (motstående katet)/(närliggande katet)
$\cot v = (b/a) =$ (närliggande katet)/(motstående katet)

Härur fås:

$a = c \cdot \sin v, b = c \cdot \cos v$
$a = b \cdot \tan v, b = a \cdot \cot v$, samt att

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\cot v}$.

För komplementvinklen $(\pi/2 - v)$ gäller:
$\sin(\pi/2 - v) = \cos v, \cos(\pi/2 - v) = \sin v$
$\tan(\pi/2 - v) = \cot v, \cot(\pi/2 - v) = \tan v$

Man erhåller också:

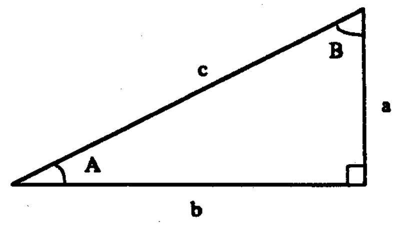
Sats

Trigonometriska ettan

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

(Fås direkt ur Pythagoras sats)

OBS! $\sin^2 v = (\sin v)^2 = \sin v \cdot \sin v$; $(\sin v)^2$ är ej lika med $\sin^2 v^2$.

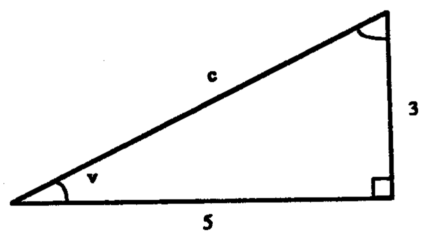


Exempel

Solvera en rätvinklig traingel med $a = 3.0$ och $A = 25°$ (se figur), dvs. bestäm de sidor och vinklar som inte är givna.
Lösning:
Vinklen $B = 90° - A = 65°$. Nu är $\sin A = a/c$, varför sidan

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{3.0}{\sin 25°} \approx \frac{3.0}{0.423} \approx 7.1$$

($\sin 25°$ fås med räknedosa, räknesticka eller ur tabell.)
Vidare är $\tan A = a/b$, varför $b = a/\tan A \approx 3.0/0.466 \approx 6.4$
Svar: $B = 65°, c \approx 7.1$, och $b \approx 6.4$ (längdenheter).



Exempel Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 3/5$ och $0 < v < \pi/2$.
Lösning:
Rita en rätvinklig triangel med kateterna $a = 3$ och $b = 5$. Då är $\tan v = 3/5$. Enligt Pythagoras’ sats är hypotenusan då

$$c = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ varför } \sin v = \frac{3}{\sqrt{34}}, \cos v = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

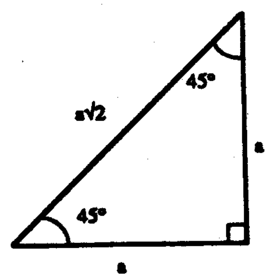
Övningsuppgifter

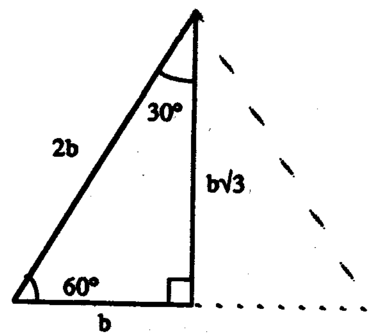
Ö-67 Solvera följande rätvinkliga trianglar (beteckningar enligt figur ovan):
[1] $c = 3.6$ och $A = 40°$

[2] $a = 2.0$ och $b = 4.0$
[3] $a = 4.0$ och $B = 35°$
[4] $b = 3.5$ och $B = 30°$
[5] $b = 2.5$ och $c = 4.5$
[6] $b = 2.7$ och $A = 27°$

Ö-68 Bestäm (för $0 < v < \pi/2$) exakta värdet av:
[1] $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 1/3$. (Ledning: Rita en rätvinklig triangel med $a = 1$ och $c = 3$)
[2] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 2/3$
[3] $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 5/2$
[4] $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0.3$

Vi härleder nu de trigonometriska funktionernas värden för $45°, 60°$ och $30°$. (Om man inte kan dessa värden utantill, måste man snabbt kunna göra en härledning.)





För $v = 45° = \pi/4$ är den rätvinkliga triangeln (figur 1 ovan) en halv kvadrat. Då är kateterna a och $b = a$, samt hypotenusan $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$, varför:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin 45° &= \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\cos 45° &= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\tan 45° &= \tan\frac{\pi}{4} = 1\\
\cot 45° &= \cot\frac{\pi}{4} = 1
\end{aligned}}$$

För $v = 60° = \pi/3$ kan den rätvinkliga triangeln uppfattas som en halv liksidig triangel (figur 2 ovan). (I en liksidig triangel är alla vinklarna lika med $60°$, varför vinklarna i en halv liksidig triangel är $60°, 90°$ och $30°$.) Alltså är hypotenusan $c = 2b$ och Pythagoras' sats ger $a = \sqrt{a^2 - b^2} = b\sqrt{3}$, varför:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin 60° &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\cos 60° &= \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\\
\tan 60° &= \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\\
\cot 60° &= \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}}$$

För $v = 30° = \pi/6$ erhålles under betraktande av samma figur som för $60°$:

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cot 30^\circ = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

ty sin 30°=(motsående katet)/(hypotenusan)= $b/2b = 1/2$ osv.

Övningsuppgifter

Ö-69 Bestäm exakta värdet av

[1] $\cos 30^\circ + \tan 30^\circ$

[2] $(\cos 30^\circ - \sin 30^\circ)/(\cos 60^\circ + \sin 60^\circ)$

[3] $(\tan^2 60^\circ - \cos^2 30^\circ)/(\tan 45^\circ + \sin 30^\circ)$

Ö-70 Förenkla

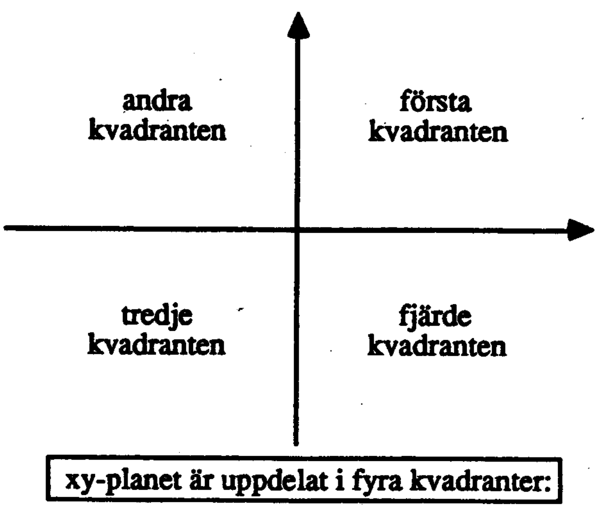
[1] $x^{\cos(\pi/6)} \cdot x^{\sin(\pi/3)}$

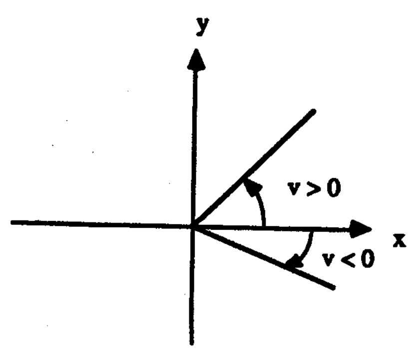
(Ledning: använd potenslagarna!)

[2] $x^{\tan(\pi/4)} \cdot x^{-\cos(\pi/6)}$

[3] $x^{\sin(\pi/6)+\cos(\pi/3)}/x^{\tan(\pi/4)+\cot(\pi/4)}$

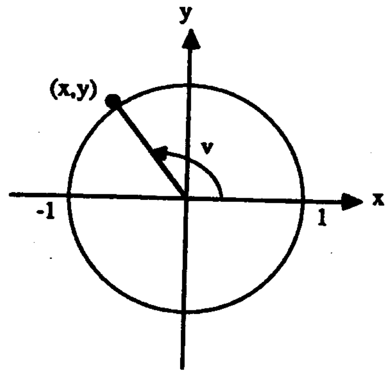
2.3 De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar





En vinkel räknas positiv om den mäts *moturs*, och negativ om den mäts *medurs*, vanligen räknat från positiva x-axeln.

Antag, att (x, y) är en punkt på enhetscirkeln, vars ekvation är $x^2 + y^2 = 1$. De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar definieras genom:

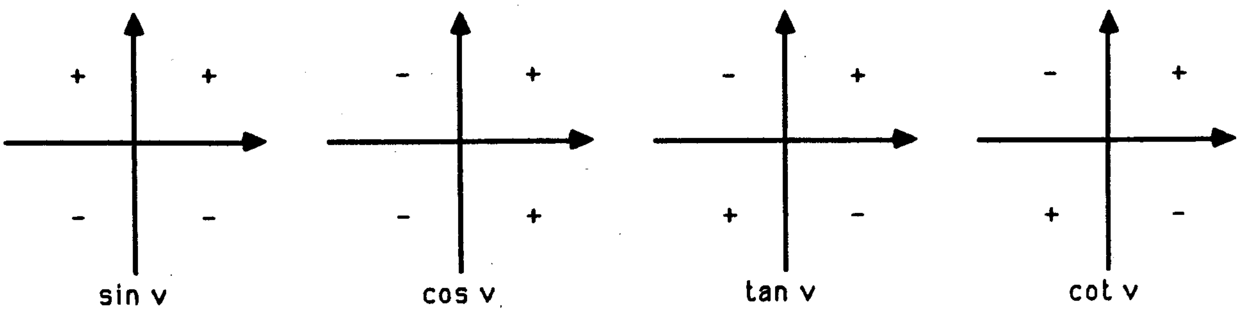


DEFINITION

$$\begin{cases} \sin v = y \\ \cos v = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan v = y/x \quad \text{för } x \neq 0, \quad (\text{dvs. } v \neq \pi/2 + n\pi) \\ \cos v = x/y \quad \text{för } y \neq 0, \quad (\text{dvs. } v \neq n\pi) \end{cases}$$

Vi ser att definitionerna stämmer överens med de tidigare givna för $0 < v < \pi/2$, dvs för $x > 0, y > 0$. (Rita figur!) Eftersom $\sin v = y$, är $\sin v$ positivt för vinklar i första och andra kvadraten och negativt i tredje och fjärde. Liknande regler för $\cos, \tan, \cot$:



Av definitionerna ovan följer direkt att

Sats

[1] $\tan v = \sin v / \cos v = 1/\cot v$ och $\cot v = \cos v / \sin v = 1/\tan v$

[2] $-1 \leq \sin v \leq 1$ och $-1 \leq \cos v \leq 1$ $\{$för *alla* vinklar $v\}$

[3] $\sin 0 = 0, \sin \pi/2 = 1, \sin \pi = 0, \sin 3\pi/2 = -1, \sin 2\pi = 0$

[4] $\cos 0 = 1, \cos \pi/2 = 0, \cos \pi = -1, \cos 3\pi/2 = 0, \cos 2\pi = 1$

[5] $\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$ och $\cos v = \cos(v + n \cdot 2\pi)$, för varje heltal n.

[6] $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ [Trigonometriska ettan]

Exempel Bestäm exakt: $\cos(37\pi/6)$

Lösning:

$\cos(37\pi/6) = \cos(\pi/6 + 3\cdot 2\pi) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

Exempel Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = -2$ och $\pi/2 < v < \pi$.

Lösning:

Med hälp av formeln $\cot v = \cos v/\sin v$ samt "triogometriska ettan" får man ekvationssystemet

$$\begin{cases} \cos v/\sin v = -2 \\ \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \end{cases} \quad \text{med lösningar} \quad \begin{cases} \cos v = \pm 2/\sqrt{5} \\ \sin v = \mp 1/\sqrt{5} \end{cases}$$

Eftersom v ligger i andra kvadranten, där $\cos v < 0$ och $\sin v > 0$, fås.

Svar: $\cos v = -2/\sqrt{5}$ och $\sin v = 1/\sqrt{5}$.

Övningsuppgifter

Ö-71 I vilken kvadrant hamnar följande vinklar?

[1] $4\pi/3$
[2] $700°$
[3] $50\pi/3$
[4] $-17\pi/6$
[5] $-1000°$
[6] $100\pi/3$

Ö-72 Bestäm exakt

[1] $\cos 33\pi$
[2] $\sin(17\pi/2)$
[3] $\sin(33\pi/4)$
[4] $\cos(-23\pi/3)$
[5] $\tan(-39\pi/4)$
[6] $\cot(-101\pi/3)$

Ö-73 Visa att

[1] $1/\cos^2 v = 1 + \tan^2 v$
[2] $1/\sin^2 v = 1 + \cot^2 v$

Ö-74 Visa (för godtyckliga heltal n) att

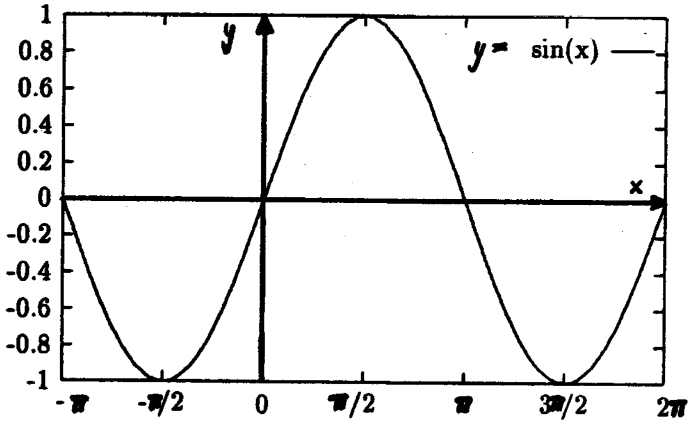
[1] $\sin n\pi = 0$
[2] $\cos n\pi = (-1)^n$
[3] $\sin[(2n+1)\pi/2] = (-1)^n$
[4] $\cos[(2n+1)\pi/2] = 0$

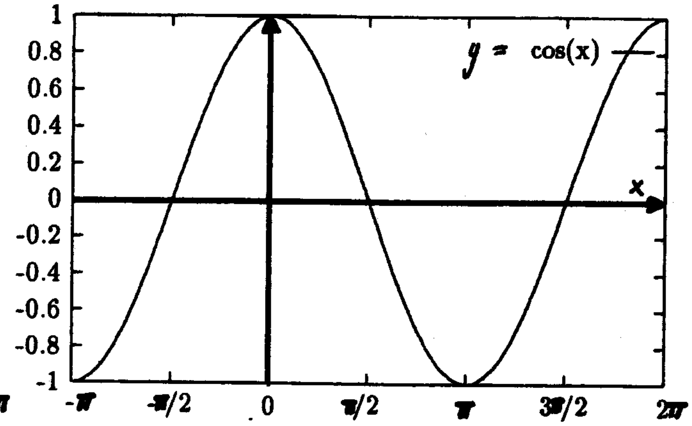
Ö-75 Bestäm exakt

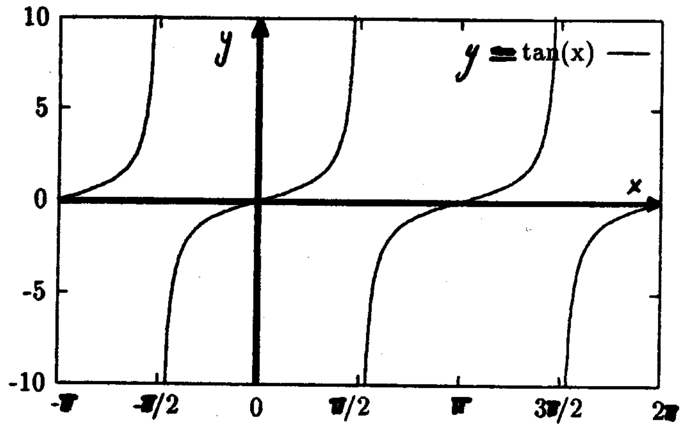
[1] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 3/4$ och $3\pi/2 < v < 2\pi$
[2] $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 0.4$ och v är i andra kvadranten.
[3] $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 3$, och $\pi < v < 3\pi/2$
[4] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 2/7$

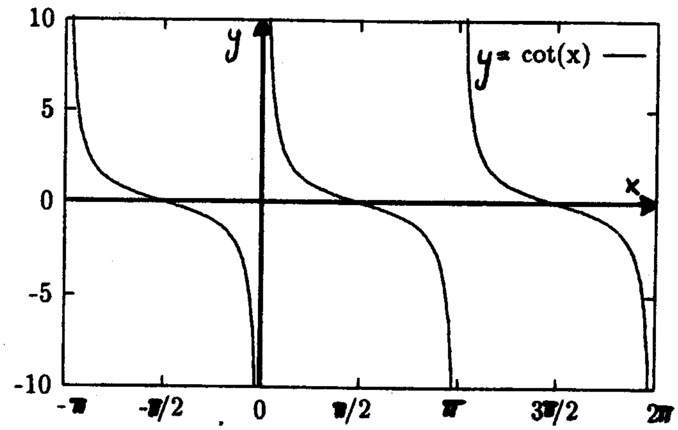
Ö-76 Beräkna exakt

[1] $\sin v + \cos v$, om $\tan v = 4/3$ och $0 < 0 < \pi/2$
[2] $\sin v - \cos v$, om $\cot v = -3/4$ och $\pi/2 < v < \pi$
[3] $\tan v + \cot v$, om $\sin v = -9/\sqrt{145}$, och $3\pi/2 < v < 2\pi$









2.4 Några enkla trigonometriska formler

Sats

$$\begin{cases} \sin(-v) = -\sin v \\ \cos(-v) = \cos v \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(-v) = -\tan v \\ \cot(-v) = -\cot v \end{cases}$$

$$\sin(\pi - v) = \sin v \qquad \cos(\pi - v) = -\cos v$$

$$\begin{cases} \sin(\pi/2 - v) = \cos v \\ \cos(\pi/2 - v) = \sin v \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(\pi/2 - v) = \cot v \\ \cot(\pi/2 - v) = \tan v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(v + \pi) = -\sin v \\ \cos(v + \pi) = -\cos v \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(v + \pi) = \tan v \\ \cot(v + \pi) = \cot v \end{cases}$$

Dessa formler kan härledas med hjälp av *spegling* (se lärobok från gymnasiet.)

Exempel Bestäm $\cos(5\pi/6)$.

Lösning:

$5\pi/6$ ligger i andra kvadranten. Använd formeln $\cos v = -\cos(\pi - v)$. Vi får alltså

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exempel

$$\sin\left(\frac{35\pi}{3}\right) = \sin\left(6\cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Övningsuppgifter

Ö-77 Bestäm exakt

[1] $\sin(-\pi/4)$
[2] $\sin(5\pi/6)$
[3] $\tan(-\pi/3)$
[4] $\cos(5\pi/4)$
[5] $\cos(-7\pi/6)$
[6] $\tan(2\pi/3)$

Ö-78 Bestäm exakt

[1] $\sin 210°$
[2] $\cos 120°$
[3] $\sin(-150°)$
[4] $\tan 300°$

Ö-79 Bestäm exakt

[1] $\sin(17\pi/3)$
[2] $\tan(75\pi/4)$
[3] $\cos(50\pi/3)$
[4] $\cot(-100\pi/3)$

Ö-80 Visa (utgående från formlerna ovan) att

[1] $\tan(\pi - v) = -\tan v$
[2] $\cot(\pi - v) = -\cot v$

Av formlerna ovan (i detta och föregående avsnitt) erhålles:

Sats

(1) $\sin v = \sin u \Leftrightarrow$ $v = u + n\cdot 2\pi$ eller
$v = \pi - u + n\cdot 2\pi$

(2) $\cos v = \cos u \Leftrightarrow$ $v = u + n\cdot 2\pi$ eller
$v = -u + n\cdot 2\pi$

(3) $\tan v = \tan u \Leftrightarrow v = u + n\cdot\pi$

I samtliga formler ovan är n ett godtyckligt heltal.

Exempel Lös ekvationen $\sin v = -0.5$, dvs bestäm alla vinklar v som satisfierar ekvationen.
Lösning:
Enlösning är $v = -\pi/6$, ty $\sin(-\pi/6) = -\sin\pi/6 = -1/2$.
Formel [1] ovan ger $\sin v = \sin(-\pi/6) \Leftrightarrow v = -\pi/6 + 2n\pi$ eller $v = \pi - (-\pi/6) + 2n\pi$

Svar: $v = -\pi/6 + 2n\pi$ eller $v = 7\pi/6 + 2n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övningsuppgifter

Ö-81 Lös ekvationerna

[1] $\sin v = 1/2$
[2] $\cos v = 1/\sqrt{2}$
[3] $\tan v = \sqrt{3}$

Ö-82 Lös ekvationerna

[1] $\sin v = -\sqrt{3}/2$
[2] $\cos 5v = -1/2$ (Sätt $5v = t$)
[3] $\tan 3v = -1$

Ö-83 Lös ekvationerna

[1] $\cos 4v = \cos v$
[2] $\sin 4v = \sin v$
[3] $\tan v = \tan 4v$
[4] $\cos 4v = \sin v$

Ö-84 Lös ekvationerna

[1] $4\cos^2 v = 3$
[2] $2\cos^2 v + \cos v = 1$ (Sätt $\cos v = z$)
[3] $2\sin^2 v + 3\sin v = 2$
[4] $\tan^2 v + \tan^3 v = 3 + 3\tan v$

2.5 Additions- och subtraktionsformler

Följande formler måste kunna *utantill* eller kunna härleda:

Sats

$$\begin{cases} \sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ \sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v \\ \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(u+v) = (\tan u + \tan v)/(1 - \tan u \cdot \tan v) \\ \tan(u-v) = (\tan u - \tan v)/(1 + \tan u \cdot \tan v) \end{cases}$$

OBS! $\sin(u+v)$ är *inte* lika med $\sin u + \sin v$. (alltför vanligt fel att tro motsatsen!)

Exempel Härled formeln för $\cos(u+v)$ utgående från formeln för $\sin(u-v)$.
Lösning:

$$\begin{aligned}\cos(u+v) &= \sin\left[\frac{\pi}{2}-(u+v)\right] = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-v\right] = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cdot\cos v - \cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cdot\sin v = \\ &= \cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v\end{aligned}$$

Övningsuppgifter

Ö-85 Härled formeln för

[1] $\sin(u-v)$ utgående från formeln för $\sin(u+v)$.
(Ledning: $u-v=u+(-v)$)
[2] $\tan(u+v)$ från formlerna för $\sin(u+v)$ och $\cos(u+v)$.
[3] $\tan(u-v)$ från formeln för $\tan(u+v)$.

Ö-86 Bestäm $\tan(u+v)$, om

[1] $\tan u = 1/4, \tan v = 2/3$

[2] $\tan u = 2, \tan v = 1$

Ö-87 Beräkna exakt

[1] $\sin 75°$ [Ledning: $75 = 45 + 30$]

[2] $\cos 75°$

[3] $\tan 75°$

Ö-88 Bestäm $\sin(u+v)$, om

[1] $\sin u = 1/3, \sin v = 2/3$. u och v befinner sig i första kvadranten.
[2] $\sin u = 2/5, \sin v = 3/5$ och $0 < u < \pi/2 < v < \pi$.

2.6 Formler för dubbla resp. halva vinkeln

$$\begin{cases}\sin 2u = 2\cdot\sin u\cdot\cos u\\ \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cdot\cos^2 u - 1 = 1 - 2\cdot\sin^2 u\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos v)\\ \cos^2\frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos v)\end{cases}$$

Övningsuppgifter

Ö-89 Härled

[1] formlerna för dubbla vinkeln från additionsformlerna
[2] formlerna för halva vinkeln från lämpliga formler för $\cos 2u$

Ö-90 Antag att $\cos u = 1/3$. Bestäm exakt

[1] $\cos 2u$

[2] $\sin 2u$

[3] $\sin(u/2)$
[4] $\tan(u/2)$

Ö-91 Bestäm exakt

[1] $\sin 15°$
[2] $\sin(\pi/8)$
[3] $\tan 22,5°$

Ö-92 Antag att $\sin u = 3/\sqrt{13}$ och att $0 < u < \pi/2$. Bestäm exakt

[1] $\sin 2u$
[2] $\cos 2u$
[3] $\cos 4u$

3 Plan analytisk geometri

3.1 Avståndet mellan två punkter

Avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i ett vanligt (ortonormerat) koordinatplan kan beräknas med avståndsformeln (Rita en figur!):

Avståndsformeln

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Avståndsformlen bygger på Pythagoras sats.

Övningsuppgifter

Ö-93 Bestäm avståndet mellan (och rita en figur)

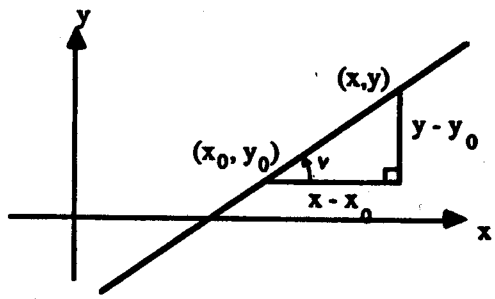
[1] $(2, 1)$ och $(3, 5)$
[2] $(0, -2)$ och origo
[3] $(-1, 1)$ och $(4, -3)$
[4] $(-2, -3)$ och $(1, -7)$

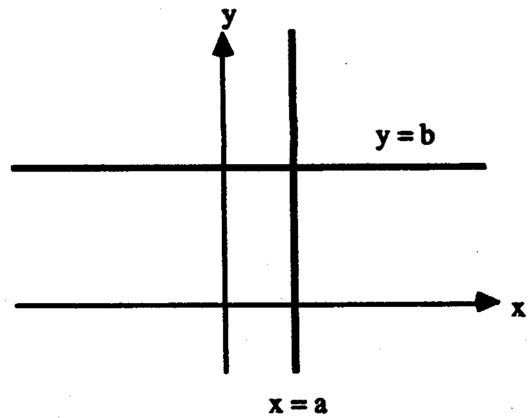
Ö-94 Bestäm en punkt på x-axeln, som ligger lika långt från punkterna

[1] $(2, 3)$ och $(4, 1)$
[2] $(4, 3)$ och $(1, -2)$

3.2 Räta linjen

Ekvationen för en rät linje *parallell med y-axeln* är $\boxed{x = a}$ och ekvationen för en rät linje *parallell med x-axeln* är $\boxed{y = b}$, där a och b är konstanter.





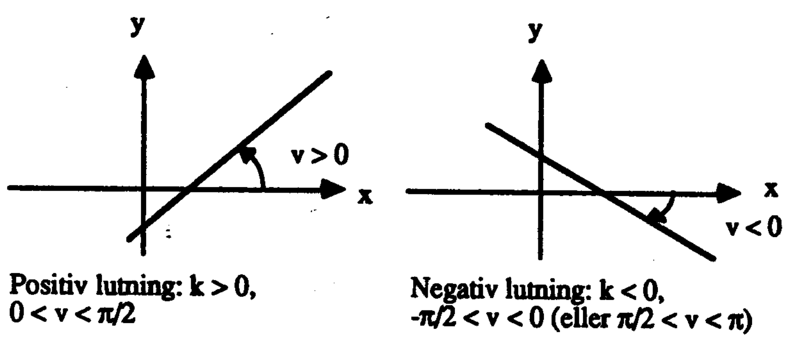
Betrakta i xy-planet en rät linje, som går genom en given punkt, (x_0, y_0) och som ej är parallell med y-axeln (se figur ovan). För punkter på linjen gäller att kvoten $(y - y_0)/(x - x_0)$ är konstant längs linjen och att konstanten är $k = \tan v$. Konstanten k kallas *riktningskoefficient* och vinkeln v kallas *riktningsvinkel*.

Vi får alltså den s.k. *enpunktsformeln* för räta linjen:

Enpunktsformeln

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0),$$

där $k = \tan v$.



Om en rät linje går genom *två* givna punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2), där $x_1 \neq x_2$, så kan riktningskoefficienten k beräknas med formeln (rita en figur över detta):

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Sammanfattningsvis är $\boxed{ax + by + c = 0}$ den allmänna formlen för räta linjens ekvation.

Exempel Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna $(3, -1)$ och $(1, 4)$.
Lösning:
Riktningskoefficeinten $k = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (-1 - 4)/(3 - 1) = -5/2$. Med enpunktsformeln fås linjens ekvation:

$y - (-1) = -5/2(x - 3)$, dvs

$$y = -\frac{5x}{2} + \frac{13}{2} \Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0$$

[Alternativt: $y - 4 = -5/2(x - 1)$, vilket naturligtvis ger samma svar.]

Svar: $5x + 2y - 13 = 0$

OBS! Kontrollera alltid räkningarna genom att visa att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen!

Övningsuppgifter

Ö-95 Bestäm på formen $ax + by + c = 0$ en ekvation för räta linjen genom

[1] origo med riktningskoefficienten $-2/5$
[2] $(1, -3)$ med riktn.koeff. 1/2.
[3] $(-1, 2)$ parallell med x-axeln.

Ö-96 Bestäm på formen $ax + by + c = 0$ en ekvation för räta linjen genom

[1] $(-1, 2)$ parallell med y-axeln.
[2] $(-1, 2)$ med riktningsvinkeln 30°
[3] $(2, -1)$ med riktningsvinkeln $-45°$.

Ö-97 Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna (rita figur!)

[1] $(2, 1)$ och $(1, 3)$
[2] $(1, 2)$ och $(-3, -1)$
[3] origo och $(-3, 2)$
[4] $(-1, 2)$ och $(-1, -4)$
[5] $(5/2, 5/3)$ och $(-2, 1)$

Ö-98 Sök skärningspunkten mellan linjerna (rita figur!)

[1] $x + 2y + 4 = 0$ och $2x + y = 0$
[2] $5x - 3y + 4 = 0$ och $3x + 2y - 9 = 0$
[3] $3x - y + 6 = 0$ och $2y - 6x + 3 = 0$
[4] $2y - x - 3 = 0$ och $2x - 4y + 6 = 0$

Jämför även lineära ekvationssystem, avsnitt 1.3.

Normal

Om två räta linjer med riktningskoefficientrna k_1 och k_2 skär varandra *vinkelrätt*, så gäller att $\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$, dvs $k_1 = -1/k_2$ och $k_2 = -1/k_1$, om k_1 och $k_2 \neq 0$. Den ena linjen kallas *normal* till den andra.

Exempel Bestäm en ekvation för normalen till linjen $4x - 3y + 6 = 0$ i punkten $(0, 2)$.
Lösning:
Den givna linjen, vars ekvation kan skrivas $y = 4/3 \cdot x + 2$, har riktningskoefficienten $k_1 = 4/3$. Normalens riktningskoefficient är därför $k_2 = -1/k_1 = -3/4$ och normalens ekvation blir $y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 0)$.

Svar: $3x + 4y - 8 = 0$.

Övningsuppgifter

Ö-99 Bestäm en ekvation för normalen till linjen

[1] $3x - 2y = 1$ i punkten $(1, 1)$
[2] $5x + 7y + 9 = 0$ i punkten $(1, -2)$

Ö-100 Bestäm en ekvation för normalen till linjen

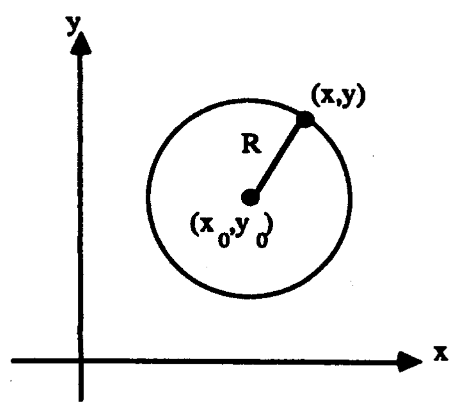
[1] $x = 3y - 1$ genom $(5/2, 0)$
[2] $5y + 2 = 0$ genom $(3, 1)$

3.3 Cirkeln

En cirkel består av alla punkter, som ligger på samma avstånd (radien) från en given punkt (medelpunkten). Ekvationen för en cirkel med radien R och medelpunkten (x_0, y_0) är:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

vilket följer av avståndsformeln. Speciellt är $x^2 + y^2 = R^2$ ekvationen för en cirkel med radien R och medelpunkten i origo.



Exempel Angiv den geometriska betydelsen av ekvationen $x^2 - 4x + y^2 + 5y = 2$
Lösning:
Ekvationen kan genom *kvadratkomplettering* skrivas

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot y + (\frac{5}{2})^2 = 2 + 2^2 + (\frac{5}{2})^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{49}{4}$$

vilket är en cirkel med medelpunkt $(2, -5/2)$ och radien $R = 7/2$. {Rita figur!}

Övningsuppgifter

Ö-101 Ge en ekvation för cirkeln med medelpunkt och radie:

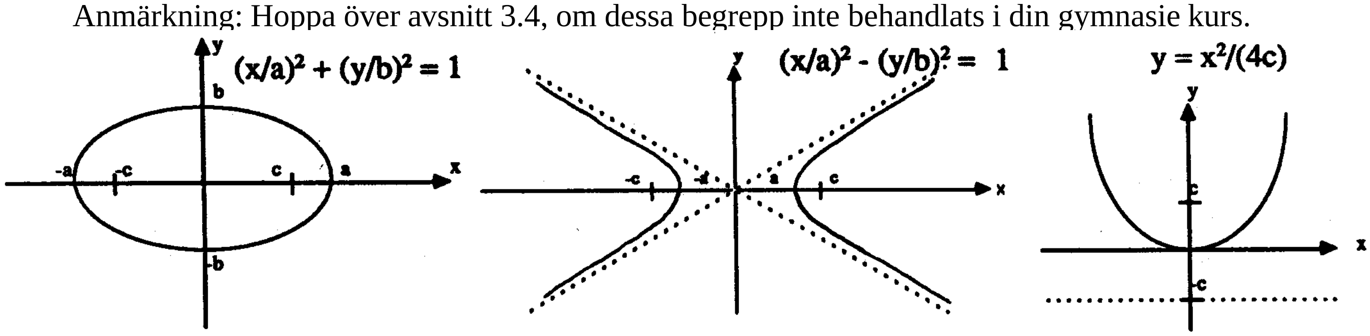
[1] $(0,0), R=3$
[2] $(0,2), R=4$
[3] $(1,-2), R=\sqrt{6}$
[4] $(-3/2, 1/4), R=0.5$

Ö-102 Angiv den geometriska betydelsen av ekvationen

[1] $x^2+y^2-5=0$
[2] $x^2+y^2+5=0$
[3] $x^2+4x+y^2=0$
[4] $x^2-2x+y^2+6y+3=0$
[5] $x^2+y^2+5x-2y+5=0$
[6] $2x^2+2y^2+6x+2y+1=0$
[7] $3x^2+3y^2+9x-y=0$
[8] $6x^2+6y^2-8x+2y+3=0$

3.4 Ellipsen, hyperbeln och parabeln

Anmärkning: Hoppa över avsnitt 3.4, om dessa begrepp inte behandlats i din gymnasie kurs.



Ellips Hyperbel Parabel

En **ellips** är en kurva som består av alla punkter (x,y), vilkas avstånd till två givna punkter (brännpunkterna) har en given konstant *summa* ($=2a$). Man kan visa (se gymnasiets lärobok) att ellipsens ekvation kan skrivas:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Anmärkning: Längderna a och b kallas ellipsens *halvaxlar*. Ellipsen skär x-axeln, dvs $y=0$, i punkterna $x=\pm a$, samt y-axeln, $x=0$, i punkterna $y=\pm b$.

OBS! Om $b=a$ erhåller man $x^2+y^2=a^2$, dvs en *cirkel*

- Om $a>b$ ligger ellipsens brännpunkter på x-axeln i $(\pm c, 0)$, där $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
- Om $b>a$ ligger brännpunkterna på y-axeln i $(0,\pm c)$, varvid $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

Med en enkel koordinattransformation, (byt x mot $x - x_0$ och y mot $y - y_0$), erhålles att

$$(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$$

är ekvationen för en ellips med medelpunkten (x_0, y_0) och (halv-) axlarna parallella med koordinataxlarna. Man kan visa att ellipsytans *area* är πab. (Om man här sätter $b = a$, fås den välkända cirkelarean πa^2.)

En **hyperbel** är en kurva som består av alla punkter (x, y), vilkas avstånd till två givna punkter (brännpunkterna $(c, 0)$ och $(-c, 0)$), har en konstant *differens* (skillnad $\pm 2a$). Hyperbelns ekvation kan skrivas: (jämför figur)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där $b^2 = c^2 - a^2$.

Hyperbeln skär x-axeln, $y = 0$, i punkterna $x = \pm a$, men saknar skärning med $x = 0$. Man kan visa att hyperbeln $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ obegränsat närmar sig någon av de räta linjerna $y = \pm bx/a$ (vilka kallas *asymptoter* till hyperbeln), då $|x| \to \infty$.

Anmärkning: Hyperbeln $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$, dvs $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$, vars brännpunkter ligger på y-axeln, kallas *konjugathyperbeln* till $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

En **parabel** är en kurva som består av alla punkter (x, y), som har samma avstånd till en given punkt (brännpunkten: $(0, c)$) som till en given rät linje (styrlinjen: $y = -c$). Parabelns ekvation kan skrivas

$$y = kx^2$$

där $k = 1/(4c)$. Parabeln $y = kx^2$ har origo som vertex (= vändpunkt).

Allmännare: $y - y_0 = k(x - x_0)^2$ är en parabel med vertex i (x_0, y_0) och (symmetri-)axel parallell med y-axeln, medan $x - x_0 = K(y - y_0)^2$ är en parabel med vertex i (x_0, y_0) och symmetriaxel parallell med x-axeln.

Exempel $4x^2 + y^2 = 8$, dvs. $x^2/2 + y^2/8 = 1$ betyder geometriskt en *ellips* med medelpunkt i origo och halvaxlar $a = \sqrt{2}$ och $b = \sqrt{8}$ (parallella med koordinataxlarna). Eftersom $b > a$ ligger brännpunkterna på y-axeln i $(0, \pm c)$, där $c = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}$.

Övningsuppgifter

Ö-103 Bestäm geometriska betydelsen av följande ekvationer. (angiv i förekommande fall medelpunkt, halvaxlar, brännpunkter och vertex.)

[1] $x^2 + 4y^2 = 36$
[2] $9x^2 + 4y^2 = 36$
[3] $x^2 - 4y^2 = 36$
[4] $4y^2 - 9x^2 = 36$

Ö-104 Bestäm geometriska betydelsen av följande ekvationer. (angiv i förekommande fall medelpunkt, halvaxlar, brännpunkter och vertex.)

[1] $x^2 - 4y = 36$
[2] $4x - y^2 = 36$
[3] $x^2 + 6x + 4y^2 = 36$
[4] $x^2 + 6x + 4y = 36$

4 Funktionslära

4.1 Inledning

En reell funktion, som kan betecknas med $x \mapsto y : y = f(x)$ eller kortare $y = f(x)$, kan betraktas som en regel, med vilken varje (reellt) x-värde, som tillhör en *definitionsmängd* D_f, tillordnas ett entydigt bestämt reellt y-värde. Mängden av alla y-värden kallas *värdemängden* V_f. En funktion $y = f(x)$ kan åskådliggöras med en kurva i xy-planet.

Exempel $y = f(x) = (x+1)^2$ har som naturlig definitionsmängd $-\infty < x < \infty$ och som värdemängd $0 \leq y < \infty$. Vi får t.ex. $f(-1) = (-1+1)^2 = 0$ och $f(2) = 9$

Vidare är $f(t) = (t+1)^2$ varför t.ex. $f(x^2) = (x^2+1)^2$, (om $t = x^2$).
Dessutom är $f(x-1) = (x-1+1)^2 = x^2$ samt

$$f(f(x)) = ((x+1)^2+1)^2 = (x^2+2x+2)^2.$$

Övningsuppgifter

Ö-105 Antag att $y = f(x) = x^2 + 1$. Bestäm

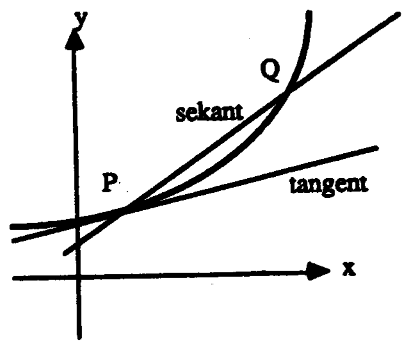
[1] D_f och V_f
[2] $f(3)$
[3] $f(-1)$
[4] $f(t)$
[5] $f(-x)$
[6] $f(x^2)$
[7] $f(f(x))$

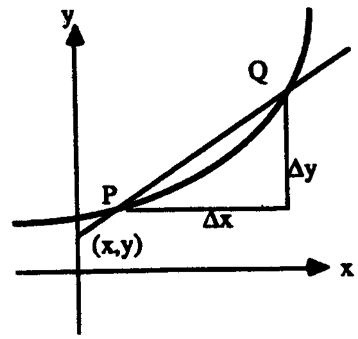
Ö-106 Antag att $f(x) = \sqrt{x-2}$. Bestäm

[1] D_f och V_f
[2] $f(11)$
[3] $f(t-1)$
[4] $f(x^3)$
[5] $f(z^2+2z+3)$
[6] $f(f(x))$

4.2 Derivatans definition

Med en *tangent* till en kurva i en punkt P menas en *gränslinje*, till vilken en sekant (dvs. en rät linje) genom P och en annan punkt Q på kurvan, obegränsat närmar sig då Q obegränsat närmar sig P längs kurvan.





Antag att punkten P har koordinaterna (x, y), där $y = f(x)$, och att den rörliga punkten Q har koordinaterna $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, där $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Då har sekanten (räta linjen) genom P och Q riktningskoefficienten

$$k_{\text{sekant}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ty $k_{\text{sekant}} = \tan v_{\text{sek}}$, där v_{sek} är sekantens riktningsvinkel.

Riktningskoefficienten för tangenten genom (x, y) får man genom att låta Δx (och därmed också Δy) obegränsat gå mot noll:

$$\boxed{k_{\text{tangent}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$$

Detta gränsvärde kallas *derivatan* av $y = f(x)$ i punkten (x, y). Vanliga beteckningar för derivatan är y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$ och $Df(x)$.

Anmärkning: Av definitionen följer att derivatan $f'(x)$ existerar i en punkt om och endast om kurvan $y = f(x)$ har en tangent i punkten.

OBS! Derivatans värde $f'(x)$ *varierar* i allmänhet med x, ty tangenterna i olika punkter (x, y) på en kurva har i allmänhet olika riktningskoefficienter, dvs olika lutning.

Exempel $y = f(x) = x^2$ har derivaten $f'(x) = 2x$, ty differenskvoten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$
$$\frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \to 2x$$

då $\Delta x \to 0$, dvs $\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta y / \Delta x) = 2x$.

Övningsuppgifter

Ö-107 Beräkna, om $f(x) = x^2$

[1] $f'(1)$
[2] $f'(0)$
[3] $f'(-3)$

Ö-108 Beräkna om $f(x) = x^3 - 2x^2$

[1] $f'(1)$
[2] $f'(-2)$
[3] $f'(4/3)$

4.3 Enkla deriveringsregler. De elementära funktionernas derivator

Sats

$$\begin{aligned} y = u + v - w &\Rightarrow y' = u' + v' - w' \\ y = c \cdot u &\Rightarrow y' = c \cdot u', \text{ om } c \text{ konstant} \\ y = u \cdot v &\Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v' \\ y = u/v &\Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \end{aligned}$$

För de elementära funktionerna kan man härleda följande derivator:

Sats

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
konstant	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
b^x	$b^x \cdot \ln b$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x = -(1 + \cot^2 x)$

Exempel $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = 1/(2\sqrt{x})$, ty

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

enligt formlen för x^a med $a = 1/2$.

Exempel $y = 1/x \Rightarrow y' = -1/x^2$, ty

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Exempel $y = x^4 \cdot e^x$ ger med $u = x^4$ och $v = e^x$ i produktformeln

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x = (4x^3 + x^4) \cdot e^x$$

Exempel $y = (3x + 2)/(x^2 + x)$ ger (då $y = u/v$ med $u = 3x + 2$ och $v = x^2 + x$)

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{3 \cdot (x^2 + x) - (3x + 2) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x)^2} = \frac{-(3x^2 + 4x + 2)}{(x^2 + x)^2}$$

Exempel $y = x^3$ har $y' = 3x^2$, men $u = 3^x$ har $u' = 3^x \cdot \ln 3$
OBS! Förväxla inte *potens* funktionen x^a med *exponential* funktionen a^x!

Exempel Beräkna $f'(1)$, om $f(x) = \ln(1/2x^3)$.
Lösning:
Vi omformar först uttrycket för $f(x)$ med hjälp av logaritmlagarna (se avsnitt 1.11).
Vi får då

$$f(x) = -\ln(2x^3) = -(\ln 2 + \ln x^3) = -(\ln 2 + 3\ln x) = -\ln 2 - 3\ln x$$

Alltså är $f'(x) = 0 - 3 \cdot (1/x) = -3/x$.
För $x = 1$ får vi $f'(1) = -3$.

OBS! Med $f'(1)$ menas värdet av $f'(x)$ för punkten $x = 1$. Man måste alltså *först* beräkna allmänna uttrycket för $f'(x)$ och *sedan* sätta in det speciella x-värdet.

Övningsuppgifter

Ö-109 Bestäm $f'(x)$ om $f(x)$ är

[1] $2x^4 - 7x^3 + x + 5$
[2] $x + \cot x$
[3] $x^2 + x + 1 + 1/x + 1/x^2$
[4] $x^5 + 5^x$
[5] $\ln(4x^7)$

Ö-110 Derivera

[1] $e^x \cdot \cos x$
[2] $x^3 \cdot \ln x$
[3] $(3x - 1)/(x + 1)$
[4] $(5x^2 - 3x + 1)/(x^3 + 4x)$
[5] $1/\sin x$

[6] $\ln(3e^x)$

[6] $1/\cot x$
[7] $\sqrt{x}/(x+1)$
[8] $x/(\sqrt{x}+1)$
[9] $\sqrt{x}/(\sqrt{x}+1)$
[10] $\ln(5x^7)\cdot\ln(x^3)$
[11] $\ln(5x^7)/\ln(x^3)$

Ö-111 Beräkna

[1] $f'(3)$ om $f(x)=1/x+\ln x$
[2] $f'(-1)$ om $f(x)=(3x^2-2x+1)/(5x+1)$
[3] $f'(5)$ om $f(x)=\ln(2x^3\cdot e^{-x})$
[4] $f'(2)$ om $f(x)=\sqrt{x}\cdot 2^x$

Ö-112 Bestäm $f''(x)$ om $f(x)$ är

[1] $x+\sqrt{x}$
[2] $e^x\cdot\sin x$
[3] $(x^3+3)/(x^2+2)$

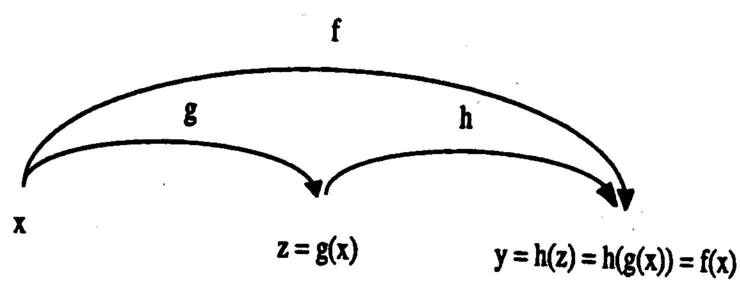
Anmärkning: Derivator av högre ordning definieras successivt:

$$f''(x)=(f'(x))' \text{ dvs. } \frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

osv.

4.4 Sammansatta funktioner. Kedjeregeln

Funktionen $f(x)=\ln(x^2+2x-7)$ kan betraktas som en sammansättning $f(x)=h(g(x))$ av funktionerna $g(x)=x^2+2x-7$ och $h(x)=\ln x$ (vilken naturligtvis också kan skrivas som $h(z)=\ln z$).



Övningsuppgifter

Ö-113 Bestäm $h(g(x))$ om

[1] $g(x)=e^x, h(x)=\sin x$
[2] $g(x)=2x+1, h(x)=\sqrt{x}$
[3] $g(x)=2x^3-x, h(x)=1/x$
[4] $g(x)=(2x-1)/(x+1)$,
$h(x)=(x+1)/(2-x)$

Ö-114 Bestäm $g(h(x))$ om

[1] $g(x)=e^x, h(x)=\sin x$
[2] $g(x)=2x+1, h(x)=\sqrt{x}$
[3] $g(x)=2x^3-x, h(x)=1/x$
[4] $g(x)=(2x-1)/(x+1)$,
$h(x)=(x+1)/(2-x)$

För derivatan av en sammansatt funktion gäller *kedjeregeln*. Om $y = h(z)$, där $z = g(x)$, dvs om $y = h(g(x))$, så är:

Sats

Kedjeregeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{dvs.}$$

$$\frac{d}{dx}(h(g(x))) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Anmärkning: $dz/dx = g'(x)$ kallas *inre derivatan* av $h(g(x))$.

(Kedjeregeln är nog den viktigaste räkneregeln för en teknolog. Den används ständigt i differential- och integralkalkyl!)

Exempel Beräkna derivatan av $y = \ln(x^2 + 2x - 7)$

Lösning:

Vi skriver $y = \ln z$ med $z = x^2 + 2x - 7$ och använder kedjeregeln: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$.

Här är

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + 2x - 7}$$

och

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 2x - 7) = 2x + 2$$

Alltså fås y' som den sammansatta derivatan:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 7}$$

Tillägg: Om $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 7)$, är alltså $f'(2) = (4 + 2)/(4 + 4 - 7) = 6$.

Anmärkning: Med kedjeregeln visas allmänt att

$$\frac{d}{dx}(\ln z) = \frac{d(\ln z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \cdot z' \quad \text{dvs}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

vilket gäller för $z = g(x) > 0$. Allmännare kan visas att för $g(x) \neq 0$ gäller att

$$\frac{d}{dx} \ln |g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Exempel

$$\frac{d}{dx} \ln(\cos x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

vilket fås ur resonemanget ovan genom att sätta $g(x) = \cos x$.

Exempel

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + \sqrt{x}) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x} + x)}$$

vilket fås ur resonemanet ovan genom att sätta $g(x) = 1 + \sqrt{x}$.

Övningsuppgifter

Ö-115 Visa med hjälp av kedjeregeln att $\frac{d}{dx}(\sqrt{g(x)}) = g'(x)/(2\sqrt{g(x)})$
Ledning: sätt $g(x) = z$

Ö-116 Visa med hjälp av kedjeregeln att $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{f(x)}}) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \cdot e^{\sqrt{f(x)}}$
(Ledning: Använd t.ex. kedjeregeln upprepade gånger: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$)

Ö-117 Bestäm $f'(x)$ om $f(x)$ är

[1] $\ln(3x+1)$
[2] $e^{-2x} + 3e^{5x}$
[3] $\cos(6x+3)$
[4] $\sin(x^2+1)$
[5] $\ln(2-3x-x^2)$
[6] $(x^3-x)^4$
[7] $\sqrt{7x^2+3}$
[8] $(x^4-3x)^{-5}$

Ö-118 Bestäm $f'(x)$ om $f(x)$ är

[1] $\sin^2 x$
[2] $\tan^2 x$
[3] $e^{1/x}$
[4] $\sqrt{x/(x+1)}$
[5] $\ln \frac{5x-1}{5x+1}$
[6] $\ln |\sin x|$
[7] $\ln |x + \sqrt{x^2+3}|$

Ö-119 Beräkna

[1] $f'(2)$ om $f(x) = \ln(7-2x)$
[2] $f'(-1)$ om $f(x) = e^{-5x^2}$
[3] $f'(0)$ om $f(x) = \ln(5x^2 - 3x + 7)$
[4] $f'(-3)$ om $f(x) = \ln |(x^3+x)/(x+1)^5|$

Ö-120 Derivera

[1] $e^{-x^2} \cdot \sin 6x$
[2] $\sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x^2+1)$
[3] $\sqrt{x^2+x}/\sqrt{x^3+1}$

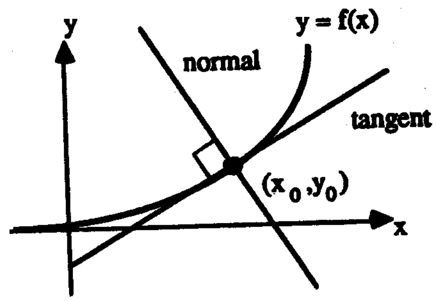
Ö-121 Bestäm

[1] $f'(1)$ om $f(x) = e^{5x} \cdot \sqrt{3x+1}$
[2] $f'(4)$ om $f(x) = \tan(\pi/x) \cdot \ln(x^2 - 7)$

Ö-122 Derivera

[1] $\cos(e^{x^2})$
[2] $e^{\cos(x^2)}$
[3] $e^{\cos^2 x}$
[4] $e^{\sqrt{3x^2-1}}$

4.5 Tangent och normal till en kurva



Enligt derivatans definition är riktningskoefficienten för tangenten i en punkt (x_0, y_0) på kurvan $y = f(x)$ lika med derivatans värde $f'(x_0)$ i punkten. Alltså gäller att

Tangentens riktningskoefficient $k_{\text{tangent}} = f'(x_0)$ och Normalens riktningskoefficient $k_{\text{normal}} = -1/f'(x_0)$ om $f'(x_0) \neq 0$.

ty $k_{\text{tangent}} \cdot k_{\text{normal}} = -1$ enligt avsnitt 3.2.

Insättning i enpunktformeln för den räta linjen $(y - y_0 = k \cdot (x - x_0))$ ger nu med $y_0 = f(x_0)$ ekvationerna för tangenten resp. normalen. (Riga figur!)

Anmärkning: Om $f'(x_0) = 0$, så är tangenten $y = y_0 = f(x_0)$ parallell med x-axeln och normalen $x = x_0$ parallell med y-axeln. (Rita figur!)

Exempel Bestäm ekvationer för tangent och normal till $y = f(x) = (3x-1)/(x^2+1)$ i punkten $(2, 1)$

Lösning:
Bilda

$$y' = f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}$$

$x_0 = 2$ ger $f'(2) = -1/5$. Tangentens ekvation blir $y - 1 = -1/5 \cdot (x-2)$, dvs. $x + 5y - 7 = 0$.

Normalens ekvation blir $y - 1 = 5(x-2)$ dvs $5x - y - 9 = 0$.

Övningsuppgifter

Ö-123 Bestäm ekvationer för tangent och normal i enpunkt (x_0, y_0) på kurvan $y = f(x)$, om

[1] $y = 2x^4 + 1$ och $x_0 = 1$
[2] $y = \ln(2x - 3)$ och $x_0 = 2$
[3] $y = x \cdot \tan x$ och $x_0 = \pi/4$

Ö-124 Bestäm ekvationer för tangent och normal i en punkt (x_0, y_0) på kurvan $y = f(x)$, om

[1] $y = (2x + 1)/(x^3 - 1)$ och $x_0 = -2$
[2] $y = \ln|5x^3 + 3x + 7|$ och $x_0 = -1$
[3] $y = e^{5-4x^2} \cdot \sqrt{3 + e^{x-1}}$ och $x_0 = 1$

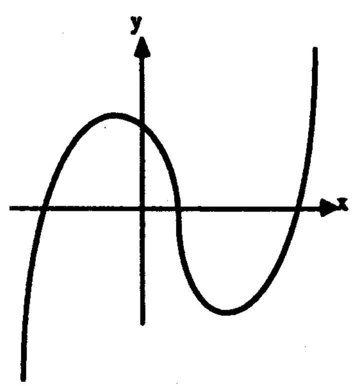
4.6 Maximi- och minimiproblem

Lokala maximi- och minimipunkter i det *inre* av ett definitionsintervall för en *deriverbar* funktion $y = f(x)$ finns att söka bland rötterna till ekvationen $f'(x) = 0$. Villkoret att $f'(x_0) = 0$ är ett nödvändigt – men ej *tillräckligt* – villkor för lokalt extremvärde i x_0 för en deriverbar funktion.

Tillräckliga villkor för extremvärde (tillsammans med $f'(x_0) = 0$) kan fås genom

- teckenstudium av förstaderivatan $f'(x)$ i en omgivning av x_0 *eller*
- beräkning (och teckenstudium) av andraderivatan $f''(x_0)$ i punkten x_0.

(se gymnasiets lärobok).



Exempel

Sök lokala maximi- och minimipunkter för $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ samt rita kurvan $y = f(x)$
Lösning:
Bilda $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$. Ekvationen $f'(x) = 0$ har rötterna $x_1 = -1$ och $x_2 = 2$.
Teckenstudium (metod 1) ger:

x	$<$	-1	$<$	2	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$
	väx.	max	avt	min	väx

Lokalt maximum för $f(-1) = 8$ och lokalt minimum för $f(2) = -19$.
Eller: (Metod 2) $f''(x) = 12x - 6$ ger $f''(-1) = -18 < 0$ dvs. maximum för $x = -1$, samt $f''(2) = +18 > 0$, dvs. minimum för $x = 2$.

Svar: Lokalt maximum $f(-1) = 8$
Lokalt minimum $f(2) = -19$.

Anmärkning: Funktionen $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ har *lokala* max och min, men saknar såväl största som minsta värde, ty $f(x) \to \infty$, då $x \to \infty$ och $f(x) \to -\infty$, då $x \to -\infty$.

Övningsuppgifter

Ö-125 Sök lokala maxima och minima samt ev. största och minsta värde, om $f(x)$ är:

[1] $2x^2 + 4x - 1$
[2] $5 - 3x - 5x^2$
[3] $3x - x^3 + 1$
[4] $x^3 + 6x^2 + 1$
[5] $x^3 - 3x^2 + 10x$

Ö-126 Sök lokala maxima och minima samt ev. största och minsta värde, om $f(x)$ är:

[1] $3x^4 + 4x^3 - 12x^2$
[2] $x^4 - 2x^3 + 6$
[3] $e^{2x} - 18x$
[4] $\sqrt{x^2 + 12x + 41} \cdot e^{-x/6}$

PROVRÄKNING (Blandade exempel)

[1] Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}$$

[2] Sök reella lösningar till ekvationen $3 \cdot |2x-1| = 4 + x$

[3] Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x + 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

[4] Bestäm samtliga rötter till ekvationen

$$2x^3 + 3x^2 - x - 2 = 0$$

[5] Sök reella lösningar till ekvationerna

[a] $2\ln x - \ln(2x-1) = \ln(1/x)$

[b] $3\lg 2 - 2\lg x = 2$

[6] Bestäm exakta värdet av

[a] $\sin 105°$
[b] $\tan 15°$
[c] $\cos 22.5°$

[7] Höjden mot basen in en likbent triangel är 4 gånger så stor som den i triangeln inskrivna cirkelns radie. Bestäm triangelns vinklar.

[8] Bestäm alla vinklar v som satisfierar ekvationen

$$2\cos^2 v + \sin v = 1$$

[Ledning: använd “trigonometriska ettan”]

[9] Bestäm alla vinklar v mellan 0 och 2π som satisfierar ekvationen

$$\tan 5v = \cot v$$

[Ledning: använd formeln $\cot v = \tan(\frac{\pi}{2} - v)$]

[10] Ekvationen $2x^2 + 2y^2 - 2x + 10y = 1$ betyder geometriskt en cirkel (i ett ortonomrerat koordinatsystem). Bestäm cirkelns medelpunkt och radie.

[11] Bestäm koordinaterna för skärningspunkterna mellan cirkeln $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$ och räta linjen $2x + 3y = 12$. (Riga figur!)

[12] Bestäm $f'(1)$, om $f(x) = \sqrt{3x - x^2} \cdot e^{5(x-1)}$

[13] Ange på formen $ax + by + c = 0$ ekvationer för tangent resp. normal till kurvan $y = (2x^2 - 1)/(x^3 + 2x)$ i den punkt där $x = 1$.

[14] Visa att det finns en konstant k, så att funktionen $y = \sin\sqrt{x}$ satisfierar ekvationen $2x \cdot y'' + y' = k \cdot y$.

[15] Bestäm $f'(-4)$ om $f(x) = \ln|\tan(\pi/x)|$.

[16] [a] Sök lokala maxima och minima för funktionen $f(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^{3x}$, där $-\infty < x < \infty$.

[b] Har funktionen något största resp. minsta värde?

FACIT TILL ÖVNINGSUPPGIFTERNA

Ö-1

[1] $6y - 14x + 3z$

[2] $c - 2b - a$

[3] $-7a - b = -(7a + b)$

Ö-2

[1] 81

[2] 64

[3] 9

[4] -8

[5] 1

Ö-3

[1] $24a^2b^5$

[2] $625a^{20}b^8$

[3] $-6x^{11}y^7$

[4] $-72x^{20}y^{13}z^7$

Ö-4

[1] $3a^2 - 2ab - b^2$

[2] $x^4 - 1$

[3] $6x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

Ö-5

[1] $x^2 + 6xy + 9y^2$

[2] $4x^2 - 20x + 25$

[3] $x^4 - 8x^2y^3 + 16y^6$

Ö-6

[1] $x^2 - 4$

[2] $9a^4 - 4x^2$

[3] $16x^8 - 81$

Ö-7

[1] $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

[2] $a^3 - 15a^2b^2 + 75ab^4 - 125b^6$

[3] $27a^3 + 54a^2b^4 + 36ab^8 + 8b^{12}$

[4] $64x^6 - 288x^5 + 432x^4 - 216x^3$

Ö-8

[1] $(x + 3)(x - 3)$

[2] $(x + 2)^2$

[3] $4(b - 2a)(b + 2a)$

Ö-9

[1] $3(x - 3y)^2$

[2] $x^2(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

[3] $x^2y(2x - y)^2$

Ö-10

[1] $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

[2] $y(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$

[3] $x^3(x + 2y^3)(x^2 - 2xy^3 + 4y^6)$

Ö-11

[1] $(x+1)^2-2$

[2] $6-(x-1)^2$

[3] $2(y-2)^2-5$

[4] $\frac{53}{4}-4(y+\frac{5}{4})^2$

[5] $(x+3)^2+(y-2)^2-12$

Ö-12

[1] $(x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$

[2] $\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2$

[3] $(4x-3)^2$

[4] $(x^2-1)^2+1$

[5] $(x-1)^2-(y-\frac{3}{2})^2+(z-2)^2-\frac{11}{4}$

Ö-13

[1] -5 för $x=-2$

[2] 16 för $x=1$

[3] 3/4 för $x=-1/2$

Ö-14

[1] 6 för $x=1$

[2] 32 för $x=-5$

[3] $53/4$ för $x=-5/4$

Ö-15

[1] $101/24=4\frac{5}{24}$

[2] $-6/5=-1.2$

Ö-16

[1] $1/8=0.125$

[2] 9

[3] $-1/125=-0.008$

Ö-17

[1] 2^{-5}

[2] 2^{-1}

[3] 2^9

Ö-18

[1] $\frac{5x^3}{2y^3}=2.5x^3y^{-3}$

[2] a^2b^2+2

[3] $2yz^2+1-3z$

Ö-19

[1] -1

[2] 1

[3] $b-a$

[4] $1/(a-b)$

[5] $-(a-b)^2$

Ö-20

[1] $a/(a-b)$

[2] $-x^2(x+2)/(x-2)$

[3] $(x-1)/x$

Ö-21

[1] $(x^2+4y^2)/(2xy)$

[2] $(a^2+ab)/(a-b)$

Ö-22

[1] $x=\frac{35}{16}=2\frac{3}{16}$

[2] $x=-\frac{31}{7}=-4\frac{3}{7}$

Ö-23

[1] $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

[2] $\frac{x^4+3x^2+2x}{x^3-1}$

[3] $\frac{3}{4x^2-1}$

Ö-24

[1] $\frac{1}{2x(x-1)}$

[2] $\frac{x^3+4x^2-5x+6}{9-x^2}$

[3] $\frac{-x^2+9x-2}{4x(x^2-4)}$

Ö-25

[1] $x+2+\frac{3}{x-1}$

[2] $1-\frac{2}{x^2+1}$

[3] $x^2-2x-1+\frac{3}{x+2}$

Ö-26

[1] $3x-2$

[2] $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5-3x}{4(2x^2+x-1)}$

[3] $3x^2+9x+21+\frac{56x^2-15x+67}{x^3-3x^2+2x-3}$

Ö-27

[1] $x=2, y=1$

[2] $x=2.6, y=-3.4$

[3] $x=1, y=-1$

Ö-28

[1] saknar lösning

[2] ∞ många lösningar; $x=t \Rightarrow y=2t-2$ [för alla t]

[3] $x=2, y=-1, z=-3$

Ö-29

[1] 5

[2] 5

[3] 2

[4] 1.5

[5] 14

Ö-30

[1] $x_1=3, x_2=-1$

[2] $x_1=2.5, x_2=-8.5$

[3] $x_1=4, x_2=0$

[4] $x_1=-2/3, x_2=-4/3$

[5] saknar lösning

[6] $x_1=2, x_2=4/3$

Ö-31

[1] $-4<x<4$

[2] $-1\le x\le 5$

[3] $-1<x<-1/3$

[4] $-5\le x<-3$ och $-1<x\le 1$

Ö-32

[1] $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{för} \quad x\ge 0 \\ 0 & \text{för} \quad x<0 \end{cases}$

[2] $f(x)=\begin{cases} x & \text{för} \quad x\ge 0 \\ 3x & \text{för} \quad x<0 \end{cases}$

[3] $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{för} \quad x\ge 2 \\ 3 & \text{för} \quad -1\le x<2 \\ 1-2x & \text{för} \quad x<-1 \end{cases}$

[4] $f(x)=$
$\begin{cases} 18x-1 & \text{för} \quad x\ge 1/3 \\ 7-6x & \text{för} \quad -1/2\le x<1/3 \\ 1-18x & \text{för} \quad x<-1/2 \end{cases}$

Ö-33

[1] 3

[2] 3

[3] 3

Ö-34

[1] 0.4

[2] 2500

[3] 12

Ö-35

[1] $\sqrt{3}/4$

[2] $3\sqrt{2}$

[3] 2

[4] $2\sqrt{3}$

Ö-36

[1] $\sqrt{14}/7$

[2] $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

[3] $(\sqrt{6}-1)/5$

[4] $(23-3\sqrt{5})/44$

[5] $(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})/4$

[6] $(7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-\sqrt{6}-12)/23$

Ö-37

[1] $a\sqrt{b}$

[2] $-a\sqrt{b}$

[3] $\sqrt{ab}$

[4] $-\sqrt{ab}$

Ö-38

[1] $\sqrt{x+2}$ för $x>-2$

[2] $-\sqrt{x-5}$ för $x>5$

[3] $-x\sqrt{4-x}$ för $x<4$

[4] $-\sqrt{x-1}/x$ för $x>1$

[5] $-\sqrt{x+1}$ för $-1<x<0$, och $\sqrt{x+1}$ för $x>0$

[6] $\sqrt{x+1}+1$ för $x\geq -1, x\neq 0$

[7] $\sqrt{2-x}-x$ för $x\leq 2, x\neq -2$

Ö-39

[1] $x_1=2, x_2=-2$

[2] $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{3}$

[3] $x_{1,2}=\pm 2/\sqrt{3}=\pm 2\sqrt{3}/3$

Ö-40

[1] $x=16$

[2] $x=3$

[3] saknar lösning

[4] $x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{3}$

[5] saknar reell lösning; ($x=\pm i$)

[6] $x=3$; (-3 är ej rot)

Ö-41

[1] $x_1=3i, x_2=-3i$

[2] $x_{1,2}=\pm 2i$

[3] $x_{1,2}=\pm 5i/4$

[4] $x_1=1+i\sqrt{3}, x_2=1-i\sqrt{3}$

[5] $x_{1,2}=-3\pm i\sqrt{10}$

Ö-42

[1] $-1 + 4i$

[2] $5 + 5i$

[3] $-1/5 + i7/5$

[4] $1/2 - i/10$

Ö-43

[1] $x_1 = -1, x_2 = -5$

[2] $x_1 = 3, x_2 = -2$

[3] $x_1 = -1, x_2 = -3/2$

[4] $x_1 = 0, x_2 = 3/11$

[5] $x_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{37})/6$

[6] $x_1 = x_2 = 1/3$

[7] $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{105})/8$

Ö-44

[1] $x_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2}$

[2] $x_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$

[3] $x_{1,2} = (3 \pm i\sqrt{31})/4$

[4] $x_{1,2} = \pm 4$ och $x_{3,4} = \pm 2$ (Fyra rötter!)

[5] $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}, x_{3,4} = \pm i$

Ö-45

[1] $(x - 1)(x + 4)$

[2] $-4(x - 1)(x + \frac{3}{2})$

[3] kan ej faktoruppdelas med reella tal

[4] $-8(x - \frac{1}{2})^2$

[5] $2[x - (3 + \sqrt{7})/2][x - (3 - \sqrt{7})/2]$

Ö-46

[1] $x^2 + x - 2 = 0$

[2] $x^2 - 4x + 1 = 0$

[3] $x^2 - 2x + 2 = 0$

Ö-47

[1] $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -4$

[2] $x_1 = 1, x_{2,3} = (-3 \pm \sqrt{5})/2$

[3] $x_1 = -2, x_{2,3} = -1 \pm i$

[4] $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 1/2, x_4 = -1$

Ö-48

[1] $x(x - 2)(x + 4)$

[2] $(x - 1)(s + \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2})$

[3] $(x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

[4] $2(x - 1)^2(x - \frac{1}{2})(x + 1)$

Ö-49

[1] $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

[2] $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm i$

[3] $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1$

Ö-50

[1] $2(x^2 + 1)(x - 1)$

[2] $2(x - 2)(x - \frac{3}{2})(x - 5)$

[3] $(x - y)(x - 2)(x + 3)$

Ö-51

[1] $x < -1$

[2] $0 \leq x \leq 2/3$

[3] $x \leq 2$ och för $x \geq 1$

[4] alla x

[5] $x < -2$ och för $1 < x < 3$

[6] $x \geq 2$

Ö-52

[1] $0 < x \leq 1/2$

[2] $x < 2$ och för $x \geq 5$

[3] $x \leq -1/2$ och för $0 < x \leq 1$

Ö-53

[1] $\sqrt{2}$

[2] $1/8$

[3] 9

[4] $9^{1/3} = \sqrt[3]{9}$

[5] $2\sqrt{2}$

Ö-54

[1] $\sqrt{3}$

[2] $2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$

[3] $5^{1/6} = \sqrt[6]{5}$

[4] $3^{1/14} = \sqrt[14]{3}$

[5] $6^{1/12} = \sqrt[12]{6}$

Ö-55

[1] $x = 4$

[2] $x = 2$

[3] $x = -1.5$

[4] $x = 3.5$

[5] $x = -1$

Ö-56

[1] $x = 0$

[2] saknar reell ösning

[3] $x = 2$

[4] $x_1 = 1$ och $x_2 = -2$

Ö-57

[1] 4

[2] -3

[3] 3.7

[4] 2.5

Ö-58

[1] 3

[2] 1/3

[3] -0.5

[4] 5

[5] 2/3

Ö-59

[1] $x = 1$

[2] $x = 1/e$

[3] $x = 10^{1/4} = \sqrt[4]{10}$

Ö-60

[1] $x = \ln 4 \approx 1.39$ [räknedosa eller tabell]

[2] $x = \lg(4/3) \approx 0.125$

[3] $x = \lg 3$

[4] $x_1 = \ln 2$ och $x_2 = \ln 3$

[5] $x = \lg 2$

Ö-61

[1] 1

[2] $\ln 6$

[3] 0

[4] $-0.5 \cdot \ln 3$

[5] 0

[6] -3

Ö-62

[1] $x = 5/9$

[2] $x = 5$

[3] $x = 1/15$

[4] $x = 4$

[5] $x_1 = (3+\sqrt{17})/4$ och $x_2 = (3-\sqrt{17})/4$

[6] saknar lösning för $x > 1$

Ö-63

[1] $90° = \pi/2$ (rad.)

[2] $240° = 4\pi/3$

Ö-64

[1] $-180° = -\pi$

[2] $-1800° = -10\pi$

Ö-65

[1] $\pi/4$

[2] $5\pi/12$

[3] $-\pi/3$

[4] $7\pi/6$

Ö-66

[1] $30°$

[2] $-22.5°$

[3] $345°$

[4] $-900°$

Ö-67

[1] $B = 50°, a \approx 2.3$ och $b \approx 2.8$

[2] $A \approx 26.6°, B \approx 63.4°$ och $c \approx 4.5$

[3] $A = 55°, b \approx 2.8$ och $c \approx 4.9$

[4] $A = 60°, c = 7.0$ och $a \approx 6.1$

[5] $A \approx 56.3°, B \approx 33.7°$ och $a \approx 3.7$

[6] $B = 63°, a \approx 1.4$ och $c \approx 3.0$

Ö-68

[1] $\cos v = \sqrt{8}/3, \tan v = 1/\sqrt{8}$

[2] $\sin v = \sqrt{5}/3, \tan v = \sqrt{5}/2$

[3] $\sin v = 5/\sqrt{29}, \cos v = 2/\sqrt{29}$

[4] $\sin v = 10/\sqrt{109}, \cos v = 3/\sqrt{109}$

Ö-69

[1] $5\sqrt{3}/6$

[2] $2 - \sqrt{3}$

[3] $3/2$

Ö-70

[1] $x^{\sqrt{3}}$

[2] $x^{(2-\sqrt{3})/2}$

[3] x^{-1}

Ö-71

[1] tredje

[2] fjärde

[3] andra

[4] tredje

[5] första

[6] tredje

Ö-72

[1] -1

[2] 1

[3] $1/\sqrt{2}$

[4] $1/2$

[5] 1

[6] $1/\sqrt{3}$

Ö-75

[1] $\sin v = -\sqrt{7}/4, \tan v = -\sqrt{7}/3$

[2] $\cos v = -\sqrt{21}/5, \tan v = -2/\sqrt{21}$

[3] $\sin v = -3/\sqrt{10}, \cos v = -1/\sqrt{10}$

[4] $\sin v = 3\sqrt{5}/7, \tan v = 3\sqrt{5}/2$ [första kvadranten] eller $\sin v = -3\sqrt{5}/7$, $\tan v = -3\sqrt{5}/2$ [fjärde kvadranten]

Ö-76

[1] 7/5

[2] 7/5

[3] $-145/72$

Ö-77

[1] $-1/\sqrt{2}$

[2] 1/2

[3] $-\sqrt{3}$

[4] $-1/\sqrt{2}$

[5] $-\sqrt{3}/2$

[6] $-\sqrt{3}$

Ö-78

[1] $-1/2$

[2] $-1/2$

[3] $-1/2$

[4] $-\sqrt{3}$

Ö-79

[1] $-\sqrt{3}/2$

[2] -1

[3] $-1/2$

[4] $-1/\sqrt{3}$

Ö-81

[1] $v = \pi/6 + n \cdot 2\pi$ eller $v = 5\pi/6 + n \cdot 2\pi$ [n godtyckligt heltal]

[2] $v = \pm\pi/4 + n \cdot 2\pi$

[3] $v = \pi/3 + n \cdot \pi$

Ö-82

[1] $v = -\pi/3 + n \cdot 2\pi$ eller $v = 4\pi/3 + n \cdot 2\pi$

[2] $v = \pm 2\pi/15 + n \cdot 2\pi/5$

[3] $v = -\pi/12 + n \cdot \pi/3$

Ö-83

[1] $v_1 = n \cdot 2\pi/3, v_2 = n \cdot 2\pi/5$

[2] $v_1 = n \cdot 2\pi/3, v_2 = \pi/5 + n \cdot 2\pi/5$

[3] $v = n \cdot \pi/3$

[4] $v_1 = \pi/10 + n \cdot 2\pi/5, v_2 = -\pi/6 + n \cdot 2\pi/3$

Ö-84

[1] $v_{1,2} = \pm\pi/6 + n \cdot \pi$

[2] $v_{1,2} = \pm\pi/3 + n \cdot 2\pi, v_3 = \pi + n \cdot 2\pi$

[3] $v_1 = \pi/6 + n \cdot 2\pi, v_2 = 5\pi/6 + n \cdot 2\pi$

[4] $v_1 = -\pi/4 + n \cdot \pi, v_{2,3} = \pm\pi/3 + n \cdot \pi$

Ö-86

[1] 11/10

[2] -3

Ö-87

[1] $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$

[2] $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$

[3] $2 + \sqrt{3}$

Ö-88

[1] $(\sqrt{5} + 4\sqrt{2})/9$

[2] $(3\sqrt{21} - 8)/25$

Ö-90

[1] $-7/9$

[2] $\pm 4\sqrt{2}/9$

[3] $\pm 1/\sqrt{3}$

[4] $\pm 1/\sqrt{2}$

Ö-91

[1] $\sqrt{2 - \sqrt{3}}/2 = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{8}$

[2] $\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$

[3] $\sqrt{2} - 1$

Ö-92

[1] 12/13

[2] $-5/13$

[3] $-119/169$

Ö-93

[1] $\sqrt{17}$

[2] 2

[3] $\sqrt{41}$

[4] 5

Ö-94

[1] $(x, y) = (1, 0)$

[2] $(10/3, 0)$

Ö-95

[1] $2x + 5y = 0$

[2] $x - 2y - 7 = 0$

[3] $y - 2 = 0$

Ö-96

[1] $x + 1 = 0$

[2] $x - y\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} = 0$

[3] $x + y - 1 = 0$

Ö-97

[1] $2x + y = 5$

[2] $3x - 4y + 5 = 0$

[3] $2x + 3y = 0$

[4] $x + 1 = 0$

[5] $4x - 27y + 35 = 0$

Ö-98

[1] $x = 4/3, y = -8/3$

[2] $x = 1, y = 3$

[3] skärning saknas [parallella linjer]

[4] alla punkter på linjen $y = (x+3)/2$ [sammanfallande linjer]

Ö-99

[1] $2x + 3y = 5$

[2] $7x - 5y = 17$

Ö-100

[1] $6x + 2y = 15$

[2] $x = 3$

Ö-101

[1] $x^2 + y^2 = 9$

[2] $x^2 + (y - 2)^2 = 16$

[3] $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 1$

[4] $16x^2 + 48x + 16y^2 - 8y + 33 = 0$

Ö-102

[1] Cirkel med medelpunkt $(0, 0)$ och radien $R = \sqrt{5}$

[2] Saknar geometrisk betydelse

[3] Cirkel; MP $(-2, 0)$, $R = 2$

[4] Cirkel; MP $(1, -3)$, $R = \sqrt{7}$

[5] Cirkel; MP $(-5/2, 1)$, $R = 3/2$

[6] Cirkel; MP $(-3/2, -1/2)$, $R = \sqrt{2}$

[7] Cirkel; MP $(-3/2, 1/6)$, $R = \sqrt{82}/6$

[8] Saknar geometrisk betydelse

Ö-103

[1] ellips; MP origo, halvaxlar $a = 6$ och $b = 3$, brännpunkter $(\pm 3\sqrt{3}, 0)$

[2] ellips; MP origo, halvaxlar $a = 2$ och $b = 3$, brännpunkter $(0, \pm\sqrt{5})$

[3] hyperbel; MP origo, $(a = 6, b = 3)$, brännpunkter $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$

[4] hyperbel; MP origo, $(a = 2, b = 3)$, brännpunkter $(0, \pm\sqrt{13})$

Ö-104

[1] parabel; vertex $(0, -9)$, brännpunkt $(0, -8)$

[2] parabel; vertex $(9, 0)$, brännpunkt $(10, 0)$

[3] ellips; MP $(-3, 0)$, halvaxlar $a = 3\sqrt{5}$ och $b = 3\sqrt{5}/2$, brännpunkter $(-3 \pm 3\sqrt{15}/2, 0)$

[4] parabel; vertex $(-3, 45/4)$, brännpunkt $(-3, 41/4)$

Ö-105

[1] $D_f : -\infty < x < \infty, V_f : 1 \leq y < \infty$

[2] 10

[3] 2

[4] $t^2 + 1$

[5] $x^2 + 1$

[6] $x^4 + 1$

[7] $x^4 + 2x^2 + 2$

Ö-106

[1] $D_f : 2 \leq x < \infty, V_f : 0 \leq y < \infty$

[2] 3

[3] $\sqrt{t-3}$ för $t \geq 3$

[4] $\sqrt{x^3 - 2}$ för $x \geq \sqrt[3]{2}$

[5] $|z + 1|$

[6] $\sqrt{\sqrt{x-2} - 2}$ för $x \geq 6$

Ö-107

[1] 2

[2] 0

[3] -6

Ö-108

[1] -1

[2] 20

[3] 0

Ö-109

[1] $8x^3 - 21x^2 + 1$

[2] $1 - 1/\sin^2 x = -\cot^2 x$

[3] $2x + 1 - x^{-2} - 2 \cdot x^{-3}$

[4] $5x^4 + 5^x \cdot \ln 5$

[5] $7/x$

[6] 1

Ö-110

[1] $e^x(\cos x - \sin x)$

[2] $x^2(1 + 3\ln x)$

[3] $4/(x+1)^2$

[4] $(-5x^4 + 6x^3 + 17x^2 - 4)/(x^3 + 4x)^2$

[5] $-\cos x/\sin^2 x$

[6] $1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$

[7] $(1 - x)/(2\sqrt{x}[x+1]^2)$

[8] $(\sqrt{x} + 2)/(2[\sqrt{x} + 1]^2)$

[9] $1/(2\sqrt{x}[\sqrt{x} + 1]^2)$

[10] $3(\ln 5 + 14\ln x)/x$

[11] $-(\ln 5)/(3x[\ln x]^2)$

Ö-111

[1] $2/9$

[2] $1/8$

[3] $-2/5$

[4] $(1 + 4\ln 2) \cdot \sqrt{2}$

Ö-112

[1] $-x^{-3/2}/4$

[2] $2e^x \cos x$

[3] $(12x - 2x^3)/(x^2+2)^3$

Ö-113

[1] $\sin(e^x)$

[2] $\sqrt{2x+1}$

[3] $1/(2x^3 - x)$

[4] x

Ö-114

[1] $e^{\sin x}$

[2] $2\sqrt{x} + 1$

[3] $(2 - x^2)/(x^3)$

[4] x

Ö-117

[1] $3/(3x+1)$

[2] $15e^{5x} - 2e^{-2x}$

[3] $-6\sin(6x+3)$

[4] $2x \cdot \cos(x^2+1)$

[5] $(2x+3)/(x^2+3x-2)$

[6] $4(3x^2-1)(x^3-x)^3$

[7] $7x/\sqrt{7x^2+3}$

[8] $-5(4x^3-3)(x^4-3x)^{-6}$

Ö-118

[1] $2\sin x \cos x = \sin 2x$

[2] $2\tan x(1+\tan^2 x) = 2\sin x/\cos^3 x$

[3] $-x^2 \cdot e^{1/x}$

[4] $1/(2[x+1]\sqrt{x^2+x})$

[5] $10/(25x^2-1)$

[6] $\cot x$

[7] $1/\sqrt{x^2+3}$

Ö-119

[1] $-2/3$

[2] $10 \cdot e^{-5}$

[3] $-3/7$

[4] $47/30$

Ö-120

[1] $(\cos 6x - 2x\sin 6x)e^{-x^2}$

[2] $(2x + x\ln[x^2+1])/\sqrt{x^2+1}$

[3] $\frac{1}{2} \cdot (1-x^2) \cdot x^{-1/2} \cdot (x^2 - x + 1)^{-3/2}$, [förkorta!]

Ö-121

[1] $43/4 \cdot e^5$

[2] $8/9 - \ln 3 \cdot \pi/4$

Ö-122

[1] $-2x \cdot e^{x^2} \cdot \sin(e^{x^2})$

[2] $-2x \cdot \sin(x^2) \cdot e^{\cos(x^2)}$

[3] $-2\sin x \cdot \cos x \cdot e^{\cos^2 x}$

[4] $3x \cdot e^{\sqrt{3x^2-1}}/\sqrt{3x^2-1}$

Ö-123

[1] tangent: $8x - y = 5$; normal $x + 8y = 25$

[2] $2x - y = 4$, resp. $x + 2y = 2$

[3] $4(2 + \pi)x - 8y = \pi^2$, resp. $8x + 4(2 + \pi)y = 4\pi + \pi^2$

Ö-124

[1] $2x - 9y = -7$, resp. $27x + 6y = -52$

[2] $18x + y = -18$, resp. $x - 18y = -1$

[3] $63e \cdot x + 4y = 71e$, resp. $4x - 63e \cdot y = 4 - 126e^2$

Ö-125

[1] Lokalt minimum $f(-1) = -3$, minsta värde $f(-1) = -3$

[2] lokalt maximum $f(-0.3) = 5.45$, största värde $f(-0.3) = 5.45$

[3] lok.max. $f(1) = 3$, lok.min. $f(-1) = -1$, största och minsta värde saknas

[4] lok.max. $f(-4) = 33$, lok. min. $f(0) = 1$, största och minsta värde saknas

[5] lok.max. & lok.min saknas, största och minsta värde saknas.

Ö-126

[1] lok. max. $f(0) = 0$, lok. min. $f(-2) = -32$ och $f(1) = -5$, minsta värde $f(-2) = -32$

[2] lok. max. saknas; lok. min. $f(3/2) = 4\frac{5}{16}$; $[(0, 6)$ är terrasspunkt], minsta värde $f(3/2) = 4\frac{5}{16}$.

[3] lok.min. $f(\ln 3) = 9 - 18 \ln 3$, minsta värde $f(\ln 3) = 9 - 18 \ln 3$

[4] lok.max. $f(-1) = \sqrt{30} \cdot e^{1/6}$, lok.min. $f(-5) = \sqrt{6} \cdot e^{5/6}$, största och minsta värde saknas $[f(x) \to 0$, då $x \to +\infty]$

Facit till det diagnostiska provet

[1] $10a - 10b - 6$

[2] $x = -1/2$

[3] $-(x + y)$

[4] $(x^2 + 2x + 4)/(x + 2)$

[5] $2x + 4 + (2x - 11)/(x^2 - 2x + 3)$

[6] $x = -2, y = 1/2$

[7] 12

[8] $x_1 = 2/3, x_2 = -2$

[9] $x < 1$

[10] [a] $-\ln 2$
[b] -3

[11] $5\sqrt{3}/6$

[12] [a] $60°, 300°$
[b] $210°, 330°$

[13] [a] $9/2$
[b] $3\sqrt{13}/2$ (längdenheter)

[14] $8/15$

[15] $4x + 3y + 1 = 0$

[16] $(3, 0)$ resp. 3

[17] $(15x^2 - 10x - 2)/(3x - 1)^2$

[18] -3

[19] $9x + y - 8 = 0$

[20] $\sqrt{13}$, för tan $x = 3/2$

Facit till provräkningen (blandade exempel)

[1] $4/(x^4 - 1)$

[2] $x_1 = 7/5, x_2 = -1/7$

[3] $x = -2, y = 1, z = 4$

[4] $x_1 = -1, x_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{17})/4$

[5] [a] $x_1 = 1, x_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$ [b] $\sqrt{2}/5$

[6] [a] $(1 + \sqrt{3})/(2\sqrt{2}) = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$
[b] $2 - \sqrt{3}$
[c] $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

[7] Toppvinkeln $\approx 38.94°$[ty sin $\frac{v}{2} = 1/3$], basvinklarna $\approx 70.53°$

[8] $\pi/2 + n \cdot 2\pi, 7\pi/6 + n \cdot 2\pi$ och $11\pi/6 + n \cdot 2\pi$ [n heltal]

[9] $\pi/12 + n\pi/6$ för $n = 0, 1, 2, \ldots 11$

[10] $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ resp. $\sqrt{7}$

[11] $(0, 4)$ och $(\frac{30}{13}, \frac{32}{13})$

[12] $21\sqrt{2}/4$

[13] $7x - 9y - 4 = 0$ resp $27x + 21y - 34 = 0$

[14] $k = -1/2$

[15] $\pi/8$

[16] [a] lok.max $f(-2) = e^{-6}$ lok.min. $f(1/3) = -5e/9$
[b] Största värde saknas, minsta värde $f(1/3) = -5e/9$