Tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

111214 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oskar Hamlet , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (14p)
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt D vara det område i xy-planet som begränsas av parabeln $y = x^2 - 2x + 2$ och linjen $y = 2x - 1$. Skissa området D och beräkna dess area. (6p)

3. Det var jul hemma hos familjen Jansson när värmesystemet i deras hus plötsligen slutade fungera. Temperaturen utomhus var vid händelsen $-10°C$ medan det inne i huset var $20°C$ varmt. En timme efter händelsen hade temperaturen i huset sjunkit till $16°C$. När temperaturen inomhus till slut nådde $10°C$ valde familjen att lämna huset. Hur lång tid hade det då gått från det att värmesystemet gick sönder ?

Antag att temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperatur (Newtons avsvalningslag). Om $y(t)$ är temperaturen i huset t timmar efter att värmesystemet gått sönder så är i så fall

$$y' = k(y - (-10))$$

för någon proportionalitetskonstant k. (6p)

4. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet $P_4(x)$ av grad 4 för funktionen $f(x) = \cos(3x^2)$ (3p)

(b) Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(3x^2)}{3x^4}$ (3p)

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Låt R vara det område i xy-planet som begränsas av kurvan $y = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{4+x^2}}$ och x-axeln.

Beräkna volymen av den kropp K som bildas då området R roterar kring y-axeln. (6p)

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar.
(rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$ (2p)

(b) Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $y'' + x^2 y = 0$
så är $y_1 + y_2$ också en lösning till denna ekvation. (2p)

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+1}$ är konvergent. (2p)

7. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (6p)

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 111214	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_1^x e^{\sqrt{t}}\,dt\right)$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+2)(x+1)}\,dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} xy' = \sqrt{y} \\ y(1) = 9 \end{cases}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 13y = 0$ (ange lösningarna på reell form) (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$