Lösningsförslag till tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

111214 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oskar Hamlet , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

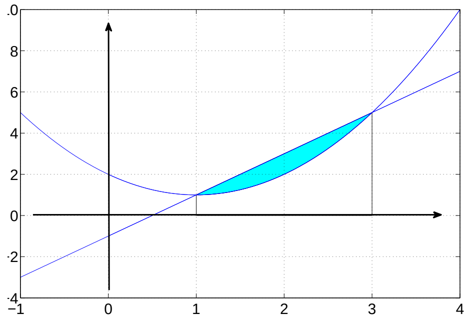
Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt D vara det område i xy-planet som begränsas av parabeln $y = x^2 - 2x + 2$ och linjen $y = 2x - 1$. Skissa området D och beräkna dess area. (6p)

Lösning: Vi börjar med att undersöka var kurvorna skär varandra;

$$x^2 - 2x + 2 = 2x - 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{4-3} \;\Leftrightarrow\; r = 1 \text{ eller } r = 3$$

Kvadratkomplettering ger vidare att $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + 1$ så parabeln har sin vändpunkt i punkten $(1, 1)$. Området D är markerat med blått i följande figur;



Arean av området D beräknas slutligen med följande kalkyl;

$$\int_1^3 \big((2x-1) - (x^2 - 2x + 2)\big)\,dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3)\,dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3}$$

Svar: 4/3

3. Det var jul hemma hos familjen Jansson när värmesystemet i deras hus plötsligen slutade fungera. Temperaturen utomhus var vid händelsen $-10°C$ medan det inne i huset var $20°C$ varmt. En timme efter händelsen hade temperaturen i huset sjunkit till $16°C$. När temperaturen inomhus till slut nådde $10°C$ valde familjen att lämna huset. Hur lång tid hade det då gått från det att värmesystemet gick sönder?

Antag att temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperatur (Newtons avsvalningslag). Om $y(t)$ är temperaturen i huset t timmar efter att värmesystemet gått sönder så är i så fall

$$y' = k(y - (-10))$$

för någon proportionalitetskonstant k. (6p)

Lösning:

$$y' = k(y-(-10)) \quad \Leftrightarrow \quad y' - ky = 10k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = 10ke^{-kt} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{-kt}y = -10e^{-kt} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = -10 + Ce^{kt}$$

Vidare får vi att;

$$\begin{cases} y(0) = 20 \\ y(1) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 = -10 + C \\ 16 = -10 + Ce^k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 30 \\ k = \ln \frac{26}{30} = \ln \frac{13}{15} \end{cases}$$

så $y = -10 + 30e^{t \ln \frac{13}{15}} = -10 + 30\left(\frac{13}{15}\right)^t$.

Vi vill nu ta reda på vid vilken tidpunkt som $y(t) = 10$.

$$y(t) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = -10 + 30\left(\frac{13}{15}\right)^t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} = \left(\frac{13}{15}\right)^t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{13}{15}} \quad (\approx 2.83)$$

Svar: Familjen Jansson bör lämna huset efter $\dfrac{\ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{13}{15}}$ timmar.

4. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet $P_4(x)$ av grad 4 för funktionen $f(x) = \cos(3x^2)$ (3p)

Lösning: Från formelsamlingen får vi att $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$, så med $t = 3x^2$ får vi att $\cos(3x^2) = 1 - \frac{1}{2}(3x^2)^2 + O((3x^2)^4) = 1 - \frac{9}{2}x^4 + O(x^8)$. Entydighetssatsen för Taylorutvecklingar ger därmed att;

Svar: $P_4(x) = 1 - \frac{9}{2}x^4$

(b) Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(3x^2)}{3x^4}$ (3p)

Lösning:

$$\frac{1-\cos(3x^2)}{3x^4} = \frac{\frac{9}{2}x^4 + O(x^8)}{3x^4} = \frac{3}{2} + O(x^4) \to \frac{3}{2} \quad , \quad \text{då } x \to 0$$

Svar: 3/2

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Låt R vara det område i xy-planet som begränsas av kurvan $y = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{4+x^2}}$ och x-axeln.

Beräkna volymen av den kropp K som bildas då området R roterar kring y-axeln. (6p)

Lösning: Metoden med cylinderskal ger att;

$$\text{Volymen av } K = \int_0^1 2\pi x \frac{1-x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 4+x^2 \\ dt = 2x dx \end{array}\right] =$$

$$= \pi \int_4^5 \frac{5-t}{\sqrt{t}}\,dt = \pi \left[10\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_4^5 = \frac{4}{3}\pi\left(5\sqrt{5} - 11\right)$$

Svar: $\dfrac{4}{3}\pi\left(5\sqrt{5}-11\right)$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska, samt motivera dina svar (rätt svar utan motivering ger inga poäng).

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$ (2p)

Svar: Sant, ty om vi använder formel för aritmetisk summa så får vi;

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) \to \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad n\to\infty$$

Alternativt kan vi betrakta uttrycket som ett gränsvärde av Riemannsummor;

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{k}{n}}_{x_k}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_k} = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(b) Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $y'' + x^2 y = 0$ så är $y_1 + y_2$ också en lösning till denna ekvation. (2p)

Svar: Sant, ty differentialekvationen är linjär och homogen.
Insättning i differentialekvationen ger ju att;

$$(y_1+y_2)'' + x^2(y_1+y_2) = \underbrace{y_1'' + x^2 y_1}_{=0} + \underbrace{y_2'' + x^2 y_2}_{=0} = 0$$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k+1}$ är konvergent. (2p)

Svar: Sant, ty $0 \le \dfrac{2^k}{3^k+1} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ är en konvergent geometrisk serie.

7. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (6p)

Lösning Se föreläsningsanteckningar eller sid 308 i Adams.

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 111214	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $\dfrac{d}{dx}\left(\int_1^x e^{\sqrt{t}}\,dt\right)$ (2p)

Svar: $e^{\sqrt{x}}$

(b) Bestäm $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+2)(x+1)}\,dx$ (3p)

Lösning:

$$\int \frac{x-1}{(x+2)(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1}\right)dx = 3\ln|x+2| - 2\ln|x+1| + C$$

Svar: $3\ln|x+2| - 2\ln|x+1| + C$

(c) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ (3p)

Lösning:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = [\arctan(\sin x)]_0^{\pi/2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Svar: $\pi/4$

(d) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} xy' = \sqrt{y} \\ y(1) = 9 \end{cases}$ (3p)

Lösning:

$$xy' = \sqrt{y} \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{y} = \ln x + C$$

Bivillkoret $y(1) = 9$ ger att $C = 6$ så;

Svar: $y = \frac{1}{4}(\ln x + 6)^2$

(e) Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 13y = 0$ (ange lösningarna på reell form) (3p)

Lösning: Differentialekvationens karakteristiska ekvation är $r^2 + 4r + 13 = 0$. Rötterna till denna ekvation är $r = -2 \pm \sqrt{(2)^2 - 13} = -2 \pm 3i$, vilket ger oss den allmänna lösningen

Svar: $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$