Tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

120413 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Emil Gustavsson , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$

(a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (3p)

(b) Beräkna undersumman $L(f, P_4)$ till integralen $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, där P_4 betecknar indelningen (partition) av intervallet $[0,1]$ i fyra lika stora delintervall. (3p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = 1 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (lösningen skall skrivas på explicit form). (6p)

4. Låt $a_k = 2 + (\frac{-1}{2})^k$. Avgör (kort motivering krävs) om talföljden $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är ...

(a) avtagande, växande, alternerande eller ingetdera. (2p)

(b) nedåt begränsad, uppåt begränsad eller ingetdera. (2p)

(c) konvergent eller divergent. (2p)

VÄND!

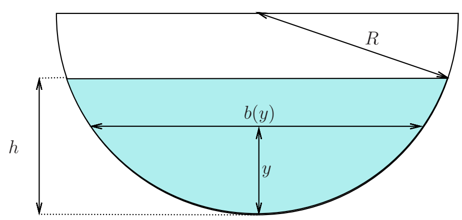
Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Antag att vattnet i en damm hålls på plats av en plan vertikal fördämning. Vattnet i dammen utövar ett hydrostatiskt tryck mot dammens fördämning och den totala hydrostatiska kraften mot fördämningen ges av integralen;

$$F(h) = \delta g \int_0^h (h - y) b(y)\, dy$$

där $\delta \approx 1\ kg/m^3, g \approx 9.8\ m/s^2$, h är största vattendjupet mätt i meter och $b(y)$ är fördämningens bredd vid höjden y, mätt i meter från fördämningens lägsta punkt. Antag i nedanstående deluppgifter att fördämningen har formen av en halvcirkel med radie R (se figur).



(a) Bestäm ett uttryck för $b(y)$. (2p)

(b) Bestäm $F(R)$. (2p)

(c) Bestäm $F(h)$ då $0 < h < R$. (2p)

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ är konvergent. (2p)

(b) Varje lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y' = t(y^2 + t^2)$ har ett lokalt minimum där $t = 0$. (2p)

(c) Om $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ så är $f'(1) = 1$. (2p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel. (6p)

Lycka till!
Thomas W

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Betrakta den kurva i (x, y)-planet som ges av parametriseringen $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 2t^3 + 5t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Ange de punkter på kurvan i vilket kurvan har en vertikal tangent. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^2 x^2 \ln x \, dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Lös differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$ kring punkten $x = 1$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + y' + y = \cos x$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \le 1$$