Lösningsförslag till tentamen
TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1
120413 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Emil Gustavsson , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$

(a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (3p)

Lösning: $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (1+\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^1 (1+2\sqrt{x}+x)\,dx =$$
$$= \left[x + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$$

Svar: 17/6

(b) Beräkna undersumman $L(f, P_4)$ till integralen $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, där P_4 betecknar indelningen (partition) av intervallet $[0,1]$ i fyra lika stora delintervall. (3p)

Lösning: $$L(f,P_4) = \tfrac{1}{4}\left(\left(1+\sqrt{\tfrac{0}{4}}\right)^2 + \left(1+\sqrt{\tfrac{1}{4}}\right)^2 + \left(1+\sqrt{\tfrac{2}{4}}\right)^2 + \left(1+\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)^2\right) =$$
$$= \tfrac{1}{16}\left(2^2 + 3^2 + (2+\sqrt{2})^2 + (2+\sqrt{3})^2\right) = \tfrac{1}{8}\left(13 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$$

Svar: $\frac{1}{8}\left(13 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = 1 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (lösningen skall skrivas på explicit form). (6p)

Lösning: Differentialekvationen är separabel och för $y \neq \pm 1$ har vi;

$$y' = 1 - y^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{1-y^2} = dt \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{(1-y)(1+y)} = dt \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = dt$$

Integrerar vi båda led får vi;

$$\frac{1}{2}\left(\ln|1+y| - \ln|1-y|\right) = t + C \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = t + C \;\Leftrightarrow\; \frac{1+y}{1-y} = De^{2t}$$

för någon konstant D $(= \pm e^{2C})$. Villkoret $y(0) = 0$ ger att $D = 1$ så;

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{2t} \;\Leftrightarrow\; 1 + y = e^{2t}(1-y) \;\Leftrightarrow\; (e^{2t}+1)y = e^{2t} - 1 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

Svar: $y = \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$

4. Låt $a_k = 2 + (\frac{-1}{2})^k$. Avgör (kort motivering krävs) om talföljden $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är ...

(a) avtagande, växande, alternerande eller ingetdera. (2p)

Svar: Talföljden är ej avatagande eller växande ty t.ex. är $a_1 < a_2$ medan $a_2 > a_3$. Talföljden är ej heller alternerande ty t.ex. är $a_1 a_2 > 0$.

(b) nedåt begränsad, uppåt begränsad eller ingetdera. (2p)

Svar: Talföljden är både nedåt och uppåt begränsad ty $|a_k| \leq \frac{5}{2}$ för alla heltal $k \geq 1$.

(c) konvergent eller divergent. (2p)

Svar: Talföljden är konvergent ty $a_k \to 2$ då $k \to \infty$

VÄND!

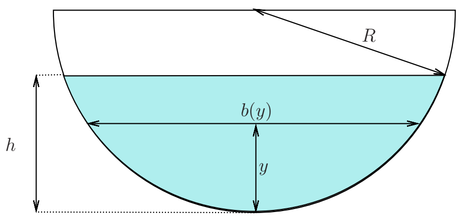
Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Antag att vattnet i en damm hålls på plats av en plan vertikal fördämning. Vattnet i dammen utövar ett hydrostatiskt tryck mot dammens fördämning och den totala hydrostatiska kraften mot fördämningen ges av integralen;

$$F(h) = \delta g \int_0^h (h-y)b(y)\,dy$$

där $\delta \approx 1\ kg/m^3, g \approx 9.8\ m/s^2$, h är största vattendjupet mätt i meter och $b(y)$ är fördämningens bredd vid höjden y, mätt i meter från fördämningens lägsta punkt. Antag i nedanstående deluppgifter att fördämningen har formen av en halvcirkel med radie R (se figur).



(a) Bestäm ett uttryck för $b(y)$. (2p)

Lösning: Cirkelns ekvation ger att $(R-y)^2 + (\frac{1}{2}b(y))^2 = R^2$ så;

Svar: $b(y) = 2\sqrt{R^2-(R-y)^2}$

(b) Bestäm $F(R)$. (2p)

Lösning: Från deluppgift (a) följer att;

$$F(R) = 2\delta g \int_0^R (R-y)\sqrt{R^2-(R-y)^2}\,dy$$

Substitutionen $x = R^2-(R-y)^2$ i denna integral ger att;

$$F(R) = \delta g \int_0^{R^2} \sqrt{x}\,dx = \delta g \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{R^2} = \frac{2}{3}\delta g R^3$$

Svar: $F(R) = \frac{2}{3}\delta g R^3$

(c) Bestäm $F(h)$ då $0 < h < R$. (2p)

Lösning: I det allmänna fallet blir integralen lite knepigare men kan beräknas genom ett variabelbyte från y till θ där $R - y = R\sin\theta$;

$$F(h) = 2\delta g \int_0^h (h-y)\sqrt{R^2-(R-y)^2}\,dy = 2R^2\delta g \int_\alpha^{\pi/2} (h + R\sin\theta - R)\cos^2\theta\,d\theta$$

där $\alpha = \arcsin\frac{R-h}{R}$. Vi delar sedan upp integralen i två delar och använder den trigonometriska formeln $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ på den ena, och får då;

$$F(h) = R^2\delta g \left((h-R)\int_\alpha^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\,d\theta + 2R\int_\alpha^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta \right) =$$

$$= R^2\delta g \left[(h-R)(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) - \frac{2}{3}R\cos^3\theta \right]_\alpha^{\pi/2} =$$

$$= R^2\delta g \left((h-R)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + \frac{2}{3}R\cos^3\alpha \right)$$

Svar: $F(h) = R^2\delta g \left((h-R)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + \frac{2}{3}R\cos^3\alpha \right)$, där $\alpha = \arcsin\frac{R-h}{R}$

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ är konvergent. (2p)

Svar: Falskt, ty $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}x}$ då $x \geq 1$ och $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}x}$ är divergent.

(b) Varje lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y' = t(y^2+t^2)$ har ett lokalt minimum där $t = 0$. (2p)

Svar: Sant, ty då $t < 0$ är $y'(t) = t(y^2+t^2) < 0$ och då $t > 0$ är $y'(t) = t(y^2+t^2) > 0$ så en lösning är avtagande innan $t = 0$ och växande efter $t = 0$, vilket innebär att $y(t)$ måste ha ett minimum där $t = 0$.

(c) Om $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ så är $f'(1) = 1$. (2p)

Svar: Sant, ty $f'(x) = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$ och därmed $f'(1) = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$

7. Formulera och bevisa Taylors formel. (6p)

Lösning: Se föreläsningsanteckningar eller sid 274-275 i Adams.

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 120413	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Betrakta den kurva i (x, y)-planet som ges av parametriseringen $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 2t^3 + 5t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Ange de punkter på kurvan i vilket kurvan har en vertikal tangent. (2p)

Lösning: I en punkt där kurvan har vertikal tangent är $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$. Eftersom $\frac{dy}{dt} = 6t^2 + 10t \neq 0$ för $t = \pm 1$ så har kurvan (med säkerhet) en tangent i motsvarande punkter (och ingen spets). Då $t = 1$ är $(x, y) = (-2, 7)$ och då $t = -1$ är $(x, y) = (2, 3)$.

Svar: Kurvan har vertikal tangent i punkterna $(-2, 7)$ och $(2, 3)$.

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^2 x^2 \ln x \, dx$ (3p)

Lösning: $\displaystyle\int_0^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9}$

(Anm. Integranden är inte definierad för $x = 0$ så integralen skall tolkas som ett gränsvärde där den undre gränsen går mot 0. I ovanstående kalkyler har vi bland annat använt att $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{3} \ln x = 0$)

Svar: $\displaystyle\int_0^2 x^2 \ln x \, dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9}$

(c) Lös differentialekvationen $\displaystyle\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$ (3p)

Lösning: Differentialekvationen är linjär av första ordningen och en integrerande faktor är $e^{\int \frac{2}{x} \, dx} = e^{2 \ln x} = x^2$, så

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left(x^2 y\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 y = x + C \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$$

Svar: Differentialekvationen har den allmänna lösningen $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}$

(d) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$ kring punkten $x = 1$. (3p)

Lösning: Vi har $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3 + x^2}}$ så linjäriseringen av $f(x)$ kring $x = 1$ är;

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \frac{1}{2}(x - 1)$$

Svar: Linjäriseringen av $f(x)$ kring $x = 1$ är $L(x) = 2 + \frac{1}{2}(x - 1)$

(e) Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + y' + y = \cos x$ (3p)

Lösning: Som partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = A \cos x + B \sin x$ som insatt i differentialekvationen ger att $-A \sin x + B \cos x = \cos x$, vilket är uppfyllt om $A = 0$ och $B = 1$.

Svar: En partikulärlösning till differentialekvationen är $y_p(x) = \sin x$

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$