Lösningsförslag till tentamen
TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1
120831 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Emil Gustavsson , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt D vara det område i xy-planet som begränsas av linjen $y = x$ och parabeln $y = x^2$.

Beräkna volymen av den kropp K som bildas då området D roterar kring x-axeln. (6p)

Lösning: Metoden med cirkelskivor ger att;

$$\text{Volymen av } K = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

Svar: $\dfrac{2\pi}{15}$

3. Antag att 100 fiskar släpps ut i en damm och att de sedan förökar sig i en takt som väl beskrivs av den logistiska ekvationen;

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{100}\left(1 - \frac{y}{1000}\right)$$

där $y(t)$ är antalet fiskar efter t dagar. Efter hur många dagar har det (enligt denna modell) blivit 200 fiskar i dammen ? (Tips: Differentialekvationen är separabel) (6p)

Lösning: För $y \neq 0$ och $y \neq 1000$ har vi;

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{100}\left(1 - \frac{y}{1000}\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(1 - \frac{y}{1000})} = \frac{dt}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000 - y}\right)dy = \frac{dt}{100}$$

Integrerar vi båda led får vi;

$$\ln|y| - \ln|1000 - y| = \frac{t}{100} + C \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{1000 - y}\right| = \frac{t}{100} + C \Leftrightarrow \frac{y}{1000 - y} = De^{t/100}$$

för någon konstant D $(= \pm e^C)$.
Villkoret $y(0) = 100$ ger att $D = 1/9$, och då $y = 200$ gäller att;

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{9}e^{t/100} \;\Leftrightarrow\; t = 100\ln(9/4)$$

Svar: Det är 200 fiskar i dammen efter $100\ln(9/4)$ (≈ 81) dagar

4. Avgör om följande två serier är konvergenta eller divergenta. Om en serie är konvergent så skall dess summa beräknas och om den är divergent så skall detta motiveras. (6p)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{(-2)^k}$

Lösning/Svar:

(a) Serien är divergent ty seriens termer går inte mot 0 $\left(\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k+3} = \frac{1}{2}\right)$

(b) Serien är geometrisk och vi har;

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{(-2)^k} = 3\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^k = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Serien är alltså konvergent med värdet 1/2

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara den talföljd som definieras rekursivt av att $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Visa att talföljden är växande och uppåt begränsad av 3. Konstatera att talföljden därför har ett gränsvärde då $n \to \infty$ och bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} a_n$. (6p)

Lösning: Låt oss börja med att visa att talföljden är uppåt begränsad av 3: Uppenbarligen är $a_1 = 1 < 3$. Vidare följer att om $a_n < 3$ så är också $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$. Med induktion följer därför att $a_n < 3$ för alla heltal $n \geq 1$.

På liknande sätt kan vi visa att talföljden är växande: Notera att $a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{7} > 1 = a_1$. Vidare följer att om $a_n > a_{n-1}$ så är också $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n$. Med induktion följer därför att $a_{n+1} > a_n$ för alla heltal $n \geq 1$.

Eftersom talföljden är växande och uppåt begränsad så är den också konvergent dvs. det existerar något a sådant att $a_n \to a$ då $n \to \infty$. Det följer då att $a \leftarrow a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \to \sqrt{6 + a}$ varpå vi måste ha $a = \sqrt{6 + a}$. Kvadrerar vi båda led i denna ekvation så får vi $a^2 = 6 + a \iff a^2 - a - 6 = 0$. Denna andragradsekvation har rötterna 3 och -2 men eftersom vi vet att $a > 1$ så följer att $a = 3$.

Svar: $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1$ (2p)

Svar: Sant, ty $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ kan betraktas som undersumma till integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ och

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1$$

(b) Antag att rörelsen hos en dämpad harmonisk ocillator beskrivs av differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ (här är $y(t)$ är avikelsen från jämviktsläget vid tiden t). Rörelsen sägs då vara kritiskt dämpad. (2p)

Svar: Sant, ty om ett sådant system beskrivs av en differentialekvation av typen $ay'' + by' + cy = 0$, där $a, b, c > 0$, så är den kritiskt dämpad om $b^2 = ac$ (se bl.a. figur 3.31 i Calculus), vilket är uppfyllt i detta fall.

(c) Funktionen $y(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n!)^2}$ löser begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} xy'' = y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (2p)

Svar: Sant, ty

$$xy'' = x\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n!)^2}\right) = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{nx^n}{(n!)^2}\right) = x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-1}}{((n-1)!)^2} = y$$

$$y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n0^n}{(n!)^2} = 0 \quad \text{och} \quad y'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 0^{n-1}}{(n!)^2} = 1$$

7. Formulera och bevisa satsen om substitution i bestämda integraler. (6p)

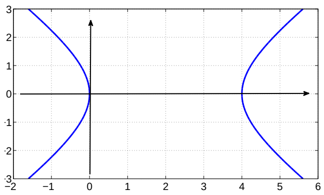
Svar: Se Sats 6 i avsnitt 5.6.

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 120831	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Skissa den kurva i xy-planet som består av punkter (x, y) sådana att $x^2 - y^2 - 4x = 0$. (2p)

Lösning & skiss: Kvadratkomplettering ger att $x^2 - y^2 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 - y^2 = 4$ så andragradskurvan är en hyperbel vars symmetriaxlar (principalaxlar) går genom punkten $(2, 0)$ och har vändpunkter i $(0, 0)$ resp. $(4, 0)$.



(b) Bestäm medelvärdet av funktionen $f(x) = \dfrac{4x}{4 + x^2}$ över intervallet $[0, 2]$. (3p)

Lösning:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{4x}{4+x^2}\,dx = \left[\ln\left(4 + x^2\right)\right]_0^2 = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2$$

Svar: $\ln 2$

(c) Lös differentialekvationen $xy' - y = x$. (3p)

Lösning: Differentialekvationen är linjär av första ordningen och kan skrivas $y' - \frac{1}{x}y = 1$. En integrerande faktor är $e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$, så

$$y' - \frac{1}{x}y = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x}y = \ln x + C \;\Leftrightarrow\; y = x(\ln x + C)$$

Svar: Differentialekvationen har den allmänna lösningen $y = x(\ln x + C)$

(d) Visa att $y(t) = e^{2t}$ är en lösning till differentialekvationen $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$. Bestäm sedan alla andra lösningar till differentialekvationen. (3p)

Lösning: Med $y(t) = e^{2t}$ så är $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 8e^{2t} - 8e^{2t} - 8e^{2t} + 8e^{2t} = 0$. Således är $r = 2$ en rot till karakteristiska ekvationen $r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = 0$. Polynomdivision ger att $r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = (r-2)(r^2-4) = (r-2)^2(r+2)$ så $r = 2$ är en dubbelrot och $r = -2$ en enkelrot till karakteristiska ekvationen.

Svar: Differentialekvationen har den allmänna lösningen $y = (C_1 t + C_2)e^{2t} + C_3 e^{-2t}$

(e) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 2$ för funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. (3p)

Lösning: Vi har $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ och $f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ och speciellt är $f(2) = \frac{1}{5}, f'(2) = \frac{-4}{25}$ och $f''(2) = \frac{22}{125}$. Detta ger oss Taylorpolynomet $P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 = \frac{1}{5} - \frac{-4}{25}(x-2) + \frac{11}{125}(x-2)^2$

Svar: $P_2(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{-4}{25}(x-2) + \dfrac{11}{125}(x-2)^2$