Övningstentamen 1

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

111214 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oskar Hamlet , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Beräkna arean av den rotationsyta som bildas då kurvan $y = \sqrt{x+1}$, $0 \le x \le 2$, roterar kring x-axeln. (6p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 20\cos 2x \\ y(0) = 0 \,,\; y'(0) = 0 \end{cases}$ (6p)

4. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{2011} \frac{1+3^k}{3^{k+1}}$ (4p)

(b) Avgör om $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k}{3^{k+1}}$ är konvergent eller divergent (motivering krävs!) (2p)

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. I ett nyvädrat rum med volymen 120 m^3 börjar några personer att röka. Röken sprider sig i en takt av 0.01 m^3/min och den välblandade rökluften lämnar rummet i samma takt och ersätts med ren luft genom ventilation med samma takt 0.01 m^3/min. Röken innehåller 4 % av den hälsovådliga gasen CO. Bestäm halten av gasen CO som funktion av tiden. Efter hur lång tid nås det hälsovådliga värdet 0.012 % ? (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska, samt motivera dina svar (rätt svar utan motivering ger inga poäng).

(a) Det finns konstanter A, B, C så att

$$\frac{x^2+x+1}{2x^3+3x^2-3x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1} \quad , \quad \text{för alla } x \neq -2, -\frac{1}{2}, 1$$ (2p)

(b) Linjen $y = x$ är en ortogonalkurva till kurvskaran $xy = C$. (2p)

(c) Potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k$ konvergerar för alla $x \in [0, 2]$ (2p)

7. Antag att $P_n(x)$ är Maclaurinpolynomet av grad n för funktionen $f(x)$ och att $f(x) = Q_n(x) + O(x^{n+1})$ för något polynom $Q_n(x)$ av grad högst n. Visa då att $Q_n(x) = P_n(x)$ för alla x. (med $O(x^{n+1})$ menas stora ordo av x^{n+1}) (6p)

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 111214	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ange en Riemannsumma för $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$ på intervallet $[2, 4]$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm $f'(2)$ då $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \ln(1 + t^2)\, dt$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm $\displaystyle\int x \cos x\, dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} x^2 y' = 1 + y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm Taylorpolynomet av grad 4 kring $x = 1$ för funktionen $f(x) = \cos(\pi x)$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$