Övningstentamen 2

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

111214 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oskar Hamlet , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Betrakta den plana kurva $\mathcal{C}$ som ges av parametriseringen $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$

(a) Skissa kurvan $\mathcal{C}$. (3p)

(b) Skriv upp en integral som ger längden av kurvan $\mathcal{C}$. (3p)
(obs! integralen behöver inte beräknas)

3. En vattentank har formen av en cirkulär cylinder med radie 4 meter och höjden 9 meter. Antag att det går hål i botten på tanken och vattnet strömmar ut med en hastigheten som är proportionell mot kvadratroten ur vattendjupet i tanken (Torricellis lag). Om vattendjupet efter t minuter är $h(t)$ meter så följer det att;

$$h'(t) = k\sqrt{h(t)}$$

för någon proportionalitetskonstant k (ty mängden vatten är i detta fall proportionell mot vattendjupet). Antag att tanken från början är helt full med vatten och att vattendjupet efter 30 minuter är 4 meter. Hur lång tid tar det då innan tanken är helt tömd på vatten? (6p)

4. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet $P_3(x)$ av ordning 3 för funktionen $f(x) = (\ln(1-x))^2$. (4p)

(b) Använd Maclaurinpolynomet i (a) för att beräkna $(\ln(0.9))^2$ approximativt. (2p)

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3+2\cos t}\,dt$ (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska, samt motivera dina svar (rätt svar utan motivering ger inga poäng).

(a) $\displaystyle\int (x^2+3)^9\,dx = \frac{(x^2+3)^{10}}{20x}$ (2p)

(b) Om y_1 och y_2 är lösningar till differentialekvationen $y'' + 3y' - 5y = x^2 \sin x$ så är $y_1 + y_2$ också en lösning till denna ekvation. (2p)

(c) Om $\{a_n\}$ är en talföljd sådana att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ så är också $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 0$. (2p)

7. Definiera Riemannintegralen för begränsade funktioner på slutna intervall. (6p)

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 111214	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x^3+x}\,dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\,dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Lös differentialekvationen $y' = y + x$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Ange en differentialekvation vars karakteristiska ekvation har de tre rötterna $r_1 = 1$ och $r_{2,3} = -2 \pm i$, samt ange den allmänna lösningen på differentialekvationen. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$