Övningstentamen 3

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

111214 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oskar Hamlet , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Lös integralekvationen $y(x) = e^x - \displaystyle\int_1^x \frac{y(t)}{t}\,dt$ (6p)

3. Familjen Andersson fick ett nytillskott i familjen julaftonen 2010 då lilla Karin föddes. Vid födseln vägde Karin 4 kg och på nyårsdagen 8 dagar senare vägde hon 4.5 kg. Antag att Karins tillväxthastighet var proportionell mot hennes vikt vid varje tidpunkt under julhelgen. Vad vägde i så fall Karin 4 dagar efter födseln ? (6p)

4. Förklara varför följande olikheter och likhet är sanna;

$$0 \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1+k^3} \le \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx \le \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$ (6p)

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Lös differentialekvationen $x^2y'' + xy' - y = x$ för $x > 0$. (6p)
(Tips: Gör variabelbytet $t = \ln x$)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska, samt motivera dina svar (rätt svar utan motivering ger inga poäng).

(a) $\displaystyle\int_0^2 (\sin(x-1))^9\, dx = 0$ (2p)

(b) Om y är en lösning på begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dt} = 2y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{5}\right) \quad , \quad y(0) = 1$$

så är $\lim_{t\to\infty} y(t) = 5$ (2p)

(c) Om $P_5(x)$ är Taylorpolynomet av grad 5 kring $x = 1$ för funktionen $f(x) = x^5 + 2x + 1$ så är $P_5(x) = f(x)$ för alla x. (2p)

7. Visa att en differentialekvation av typen $y'' + ay' + by = 0$ har en allmän lösning på formen $y = (C_1x+C_2)e^{rx}$ då differentialekvationens karakteristiska ekvation har en dubbelrot. (6p)

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 111214	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Skissa kurvan $4x^2 + y^2 + 2y = 3$ (2p)

Skiss:

(b) Bestäm $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna längden av kurvan $y = \frac{4}{3}x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 2$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Lös differentialekvationen $(\cos x)y' = e^y \sin x$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm Maclaurinserien för funktionen $f(x) = xe^{2x-1}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \le 1$$