

# Tentamen

## TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

140829 kl. 8.30–12.30

**Examinator:** Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

**Telefonvakt:** Elin Solberg, telefon: 0703 088 304

**Hjälpmedel:** bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

**Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.**

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

### Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (14p)  
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

**Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.**

2. Betrakta den plana kurva  $\mathcal{C}$  som ges av parametriseringen  $\begin{cases} x = 1/t - 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$ ,  $0 < t < \infty$ .
- (a) Skissa kurvan  $\mathcal{C}$  och ange eventuella asymptoter (enbart plottning ger inga poäng men kan utföras som kontroll). (3p)
- (b) Skriv upp en integral som ger längden av den del av kurvan  $\mathcal{C}$  som motsvarar parametervärdena  $0.5 \leq t \leq 1$  (obs! integralen behöver inte beräknas). (3p)
3. Lös begynnelsevärdesproblemet  $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 20 \cos 2x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$  (6p)
4. (a) Bestäm konvergensintervallet för potensserien  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x - 3)^n$ . (3p)
- (b) Förklara vad som menas med en betingat konvergent serie och ge exempel på en sådan serie. (3p)

## Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Antag att en rektangulärt formad simbassäng, som är 8 meter bred och 20 meter lång, är helt fylld med vatten. Antag vidare att simbassängens plana botten sluttar så att det är 1 meter djupt i ena kortändan och 3 meter djupt i den andra. Bestäm då det totala (hydrostatiska) trycket som vattnet utövar mot botten och de fyra vertikala sidoväggarna i bassängen. (6p)
6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)
- (a) Om  $f(x)$  är kontinuerlig på ett visst intervall så är  $f(x)$  också integrerbar på intervallet. (2p)
- (b) Differentialekvationen  $y' = xy + x - y - 1$  är separabel. (2p)
- (c) Om  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  är en avtagande talföljd och  $f(x)$  en avtagande funktion så är  $\{f(a_k)\}_{k=1}^{\infty}$  en växande talföljd. (2p)
7. Formulera och bevisa satsen om substitution i bestämda integraler. (6p)

Lycka till!  
Thomas W

Anonym kod	<b>TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 140829</b>	sid nr. <b>1</b>	Poäng
------------	--	---------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm  $f(1)$  och  $f'(1)$  då  $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$  (2p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

(b) Formulera medelvärdessatsen för integraler (obs! alla förutsättningar och slutsats skall finnas med i formuleringen, endast formel ger inga poäng). (3p)

**Formulering:**

.....

(c) Beräkna den generaliserade integralen  $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx$  (3p)

(Tips: gör substitutionen  $t = x^2$ )

**Lösning:**

**Svar:** .....

(d) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen  $xy' + y = xe^x$  (3p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

(e) Bestäm linjäriseringen av  $f(x) = x^2$  kring punkten  $x = 3$ . (3p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

# Formelblad

## Trigonometri.

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

## Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$