TMV130, Envariabelanalys V & AT, läsåret 2013/14
Vecko–PM läsvecka 1

Adams: 2.10, 5.1–5.6

Vi inleder kursen med kapitel 5 som handlar om *Integration.* Innan vi definierar integralbegreppet (i avsnitt 5.3) behöver vi introducera beteckningar för summor och träna oss på att hantera och beräkna vissa summor (avsnitt 5.1), bl.a. *geometriska* och *aritmetiska* summor. I avsnitt 5.2 och 5.3 skall vi speciellt studera s.k. *Riemannsummor* och tolka dem som areor. I avsnitt 5.3 definierar vi sedan den *bestämda integralen* som gränsvärde av sådana *Riemannsummor.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n(P)} f(c_i)\Delta x_i$$

Om $f(x)$ är positiv kan man tolka värdet på den bestämda integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ som arean av området mellan x-axeln och funktionskurvan $y = f(x)$, samt mellan linjerna $x = a$ och $x = b$. När vi väl definierat integralbegreppet kommer vi i avnitt 5.4 studera några viktiga egenskaper/räknelagar för integraler, bl.a. medelvärdessatsen för integraler. Med hjälp av dessa egenskaper erhåller vi (i avsnitt 5.5) Analysens huvudsats, vilket är att betrakta som ett av de viktigare resultaten inom matematisk analys. Satsen binder samman begreppen derivata och integral, och därmed differentialkalkylen med integralkalkylen, genom följande samband

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Detta samband gör det möjligt att bestämma värdet på en integral $\int_a^b f(x)\,dx$ om man lyckas hitta en s.k. *primitiv funktion* (även kallad *antiderivata*) till *integranden* $f(x)$, dvs en funktion $F(x)$ sådan att $F'(x) = f(x)$. Mycket av den tid vi kommer ägna åt integralberäkningar kommer därför handla om olika tekniker för att bestämma primitiva funktioner. Huvudidén bygger på att vi lär oss en lista med kända primitiva funktioner och med hjälp av dessa på olika sätt erhåller primitiva funktioner till andra mer komplicerade/sammansatta funktioner. En första sådan metod introduceras i avsnitt 5.6 där det illustreras hur vissa integraler kan lösas med hjälp av variabelsubstitution;

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Rekommenderade uppgifter

Talen i tabellen refererar till övningsuppgifter i sjunde upplagan av *Calculus, a complete course*, av Adams och Essex.

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
5.1	5, 9, 11, 13, 18, 19	22, 27	26
5.2			3, 12, 14, 15, 17
5.3	3, 5		11
5.4	2, 9, 27	22, 25, 36	7, 13
2.10	3, 9	8, 12, 17, 25	
5.5	3, 5, 11, 17, 30, 43	7, 25, 37, 41	46
5.6	3, 5, 7, 9, 24	15, 17, 23, 26, 35, 43	

Veckans kryssuppgifter: 5.1.22, 5.3.5, 5.5.41, 5.6.23

Lärmål

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	**Mål**
2.10	definiera begreppet *primitiv funktion* (*antiderivata*) (Def.7 sid 149) och veta vad som menas med den *obestämda integralen* av en funktion, samt hur den betecknas (Def.8, sid 149).
2.10, 5.6	ange (utantill) primitiva funktioner till $\cos x, \sin x, \dfrac{1}{\cos^2 x}, \dfrac{1}{\sin^2 x}, \dfrac{1}{x^2+1}, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, samt till alla potensfunktioner x^r och exponentialfunktioner b^x (se tabeller sid 150 & sid 318).
5.1	tolka sigmanotationen för en summa (Def.1, sid 290, samt efterföljande text). Speciellt skall du förstå vad det innebär att byta index i summor och känna till hur de aritmetiska lagarna kan tillämpas på summor beskrivna med sigmanotationen (se markerade rutor sid 291).
5.1	beräkna geometriska och aritmetiska summor dvs summor av typen $$\sum_{k=0}^{n} r^k \quad \text{respektive} \quad \sum_{k=0}^{n}(ak+b).$$
5.3	veta vad som menas med en *undersumma* respektive *översumma* för en funktion på ett intervall, samt med hjälp av dessa begrepp ge en intuitiv beskrivning av hur den *bestämda integralen* (*Riemannintegralen*) definieras.
5.3	urskilja vad som är *integrand*, *integrationsvariabel*, *integrationsgränser* och *differential* i en bestämd integral.
5.3	veta vad som menas med en *Riemannsumma* för en funktion på ett intervall och kunna beräkna bestämda integraler approximativt m.h.a. Riemannsummor.
5.4	använda de grundläggande egenskaperna för bestämda integraler i Sats 3 sid 306 för att beräkna, uppskatta eller göra omskrivningar av integraler.
5.4	veta vad som menas med *medelvärdet av en funktion över ett intervall* (Def.4 sid 309) och kunna formulera medelvärdessatsen för integraler (Sats 4, sid 308).
5.5	formulera analysens huvudsats (Sats 5, sid 311–312), samt använda den för att beräkna bestämda integraler.
5.5	derivera integraluttryck med avseende på en parameter/variabel som förkommer i den övre och/eller undre integrationsgränsen (se markerad ruta på sid 316 och t.ex. Ex.8 på sid 315).
5.6	använda substitution för att beräkna bestämda och obestämda integraler (Sats 6, sid 320).
5.6	använda trigonometriska formler, kvadreringregeln och andra räkneregler för de elementära funktionerna för att (vid behov) skriva om integranden så att integralen kan beräknas.

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	**Mål**
5.2, 5.3, App. IV	Definiera Riemannintegralen för begränsade funktioner på slutna intervall (Def.1 sid A–28). Du skall också kunna argumentera för att $I_* \leq I^*$ (Exercise 4 i App. IV), givet resultatet i Sats 2 sid A–27.
App. IV	tillämpa Sats 5 sid A–30 för att motivera att en given funktion är Riemann-integrerbar, samt kunna ge exempel på minst en funktion som inte är Riemannintegrerbar.
5.2, 5.3	beräkna areor/bestämda integraler genom att uttrycka dem som gränsvärde av Riemannsummor (se t.ex. Ex.1 & Ex.3 i avsnitt 5.2).
5.3	tolka summor som Riemannsummor, samt uppskatta, approximera och bestämma gränsvärden av Riemannsummor genom att bestämma värdet på motsvarande bestämda integral (se tex. Ex.4. sid 304–305 och Ex.10 sid 316).
5.4	bevisa medelvärdessatsen för integraler (Sats 4, sid 308).
5.5	bevisa analysens huvudsats (Sats 5, sid 311–312).
5.6	formulera och bevisa satsen om substitution i bestämda integraler (Sats 6, sid 320).