TMV130, Envariabelanalys V & AT, läsåret 2013/14
Vecko–PM läsvecka 2

Adams: 5.7, 6.1–6.3, 6.5–6.7

Under läsvecka 1 introducerade vi integralbegreppet som gränsvärde av Riemannsummor. Vi såg vidare hur man med hjälp av Analysens huvudsats kunde beräkna vissa integraler exakt (utan summationsformler och gränsvärdesberäkningar) om man lyckas bestämma en primitiv funktion till integranden. Vi såg redan förra veckan exempel på hur variabelsubstitution kan användas för att hitta primitiver, och detta är en metod vi skall återkomma till även denna vecka i avsnitt 6.3, fast med ett litet annat synsätt. Den observante bör också ha noterat att variabelsubstitution i integraler egentligen är en direkt konsekvens av kedjeregeln för derivata. I avsnitt 6.1 skall vi studera en annan integrationsmetod, kallad *partiell integration*, som istället är en direkt konsekvens av produktregeln för derivata;

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

För att bestämma primitiver kan man ibland behöva kombinera de olika integrationsmetoderna med omskrivningar av integranden (m.h.a. räknelagar för de elementära funktionerna). I avsnitt 6.2 skall vi t.ex. se hur man kan bestämma primitiver till rationella funktioner med hjälp av s.k. *partialbråksuppdelning*. Här är ett exempel på en sådan uppdelning;

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m(x^2+b^2)^n} = K(x) + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+b^2)^n}$$

I definitionen av den bestämda integralen (Riemannintegralen) krävde vi tidigare att funktionen var begränsad och att integrationsområdet var begränsat. Nu skall vi släppa lite på dessa villkor och i avsnitt 6.5 se hur man kan definiera integralen av vissa obegränsade funktioner och/eller då integrationsområdet är obegränsat. Sådana integraler kallas *generaliserade* och definieras som gränsvärde av ”vanliga” integraler t.ex.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx \qquad \text{eller} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

I övrigt skall vi i avsnitt 6.6 och 6.7 studera några metoder (*Trapetsmetoden, Mittpunktsmetoden* och *Simpsons metod*) för att beräkna integraler approximativt. Sådana är speciellt värdefulla eftersom många integraler (i någon mening de flesta) inte kan beräknas exakt.

Rekommenderade uppgifter

Talen i tabellen refererar till övningsuppgifter i sjunde upplagan av *Calculus, a complete course*, av Adams och Essex.

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
5.7	1	3, 5, 9, 15, 19	30
6.1	2	3, 5, 7	13, 19, 37
6.2	3, 11, 12	16, 21, 29	22, 23, 27
6.3	1	3, 35	9, 15, 29, 43
6.5	1, 3	9, 15, 19, 20	31, 33, 34, 35, 36
6.6		4	
6.7			4

Veckans kryssuppgifter: 5.7.15, 6.1.19, 6.2.16, 6.5.31

Lärmål

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	**Mål**
5.7	beräkna area av områden i xy-planet som begränsas av funktionskurvor och linjer parallella med koordinataxlarna.
6.1	använda partiell integration för att beräkna bestämda och obestämda integraler.
6.2	beräkna integraler av rationella funktioner bl.a. genom att utföra polynomdivision och/eller *partialbråksuppdelning*.
6.3	beräkna integraler med hjälp av *invers sinus-substitution* (se markerad ruta på sid 347 och t.ex. Ex.1&2 sid 347-348).
6.5	avgöra om en integral är generaliserad och ange skälen till detta. Du skall också känna till hur *generaliserade integraler* definieras (se Def.1 och Def.2 i avsnitt 6.5) och avgöra om en generaliserad integral är *konvergent* eller *divergent* genom att beräkna den.
6.6	redogöra för idén bakom (en skiss och kort förklaring räcker), och kunna tillämpa, *trapetsmetoden* och *mittpunktsmetoden* för approximativ beräkning av integraler.

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	**Mål**
6.1	använda partiell integration för att erhålla reduktionsformler och andra identiteter, som led i beräkning av mer komplicerade integraler (se t.ex. Ex.4 och Ex 6 i avs. 6.1).
6.3	beräkna integraler med hjälp av *invers tangens-substitution*, *secant-substitution* $\tan\frac{\theta}{2}$ - *substitution*, eller substitutioner som underlättar beräkning av integraler innehållande uttryck av typen $(ax+b)^{1/n}$.
6.3	kombinera olika egenskaper och integrationsmetoder, samt egenskaper/räkneregler hos de elementära funktionerna, för att beräkna/uppskatta integraler (i mer komplexa situationer än vad som krävs på godkäntnivå).
6.5	avgöra om en generaliserad integral är konvergent eller divergent genom att använda jämförelsekriteriet för integraler (Sats 3 sid 366).
6.7	använda *Simpsons metod* för approximativ beräkning av integraler.