TMV130, Envariabelanalys V & AT, läsåret 2013/14
Vecko–PM läsvecka 4

Adams: 2.10, 3.4, 7.9, 18.1, 18.2

De tre första veckorna på kursen ägnade vi åt integraler, integrationsmetoder och några tillämpningar på integraler. Denna och nästa vecka skall vi delvis byta tema och istället studera (ordinära) *differentialekvationer*. Det är ekvationer som beskriver förhållandet mellan en okänd funktion (ofta betecknad y) och dess derivator ($y', y'', ..., y^{(n)}$) och förkommer ofta i modeller av fysiska fenomen för att beskriva förändringar (derivata uttrycker ju förändring). Som vi sett så är ju derivata och integraler nära kopplat till varandra och vi kommer behöva utnyttja en hel del av våra integrationskunskaper för att lösa differentialekvationer.

Att lösa differentialekvationer exakt är i allmänhet lika svårt (eller omöjligt) som att beräkna integraler exakt, och i många fall får man nöja sig med att lösa differentialekvationer approximativt med någon numerisk metod. Det finns dock en hel del viktiga problem där differentialekvationerna faktiskt kan lösas exakt, och även om detta inte går så kan ibland analytiska metoder och omskrivningar vara värdefulla för att t.ex. få fram olika typer av information om lösningarna eller för att skriva om ekvationen på en form som bättre lämpar sig för numerisk beräkning.

I avsnitt 18.1 introduceras några allmänna begrepp med vars hjälp vi kan klassificera differentialekvationer. En enkel typ av differentialekvation är de som kan skrivas på formen;

$$y^{(n)}(x) = h(x)$$

Sådan kan lösas med ”direkt integration” av båda led i ekvationen (i den mån det är möjligt). I övrigt kommer vi denna vecka i huvudsak fokusera på *första ordningens differentialekvationer* dvs. ekvationer av typen;

$$y' = F(x, y)$$

Speciellt skall vi (i avsnitt 3.4, 7.9 & 18.2) studera två olika typer av sådana ekvationer som kallas *linjära* respektive *separabla*. Linjära differentialekvationer av första ordningen är ekvationer som kan skrivas på formen;

$$y' + p(x)y = q(x)$$

och separabla differentialekvationer är sådana som kan skrivas på formen;

$$g(y)y' = f(x)$$

Om en viss differentialekvation har minst en lösning så finns det i allmänhet också oändligt många sådana. Ofta söker vi en specifik lösning $y(x)$ som uppfyller något extra villkor t.ex. ett begynnelsevillkor av typen $y(a) = b$. Problemet att hitta lösningen till en differentialekvation som uppfyller ett begynnelsevillkor (eller flera om differentialekvationen är av högre ordning) kallas för ett *begynnelsevärdesproblem.*

Rekommenderade uppgifter

Talen i tabellen refererar till övningsuppgifter i åttonde upplagan av *Calculus, a complete course*, av Adams och Essex.

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
18.1	1, 2, 3, 5, 7, 10, 11	16	
2.10	29, 41, 43		
7.9	1, 4, 11, 14, 21	7, 15, 18, 19, 24	28, 31, 32
3.4	9, 11	24, 25	29
18.2			1, 2

Veckans kryssuppgifter: 3.4.25, 7.9.19, 7.9.21, 18.2.1

Lärmål

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	**Mål**
2.10	veta vad som menas med *allmänn lösning* respektive *partikulärlösning* till en differentialekvation, samt veta vad ett *begynnelsevärdesproblem* är.
2.10	lösa första ordningens differentialekvation av typen $y^{(n)} = f(x)$ genom "direkt integration".
3.4	ställa upp en differentialekvation för en viss storhet givet information om att dess *tillväxthastighet* är *propotionell* mot storheten självt. (storheten kan t.ex. uttrycka storleken på en population, kraft, temperatur mm)
7.9	redogöra för den allmänna formen för en *separabel differentialekvation* och kunna lösa sådana ekvationer. Du skall också förstå vad som menas med att skriva lösningen på *implicit* respektive *explicit form*, samt vad som menas med en *singulär lösning.*
7.9	lösa linjära differentialekvationer av första ordningen med metoden med *integrerande faktor.*
7.9	lösa *integralekvationer* som kan omformuleras till begynnelsevärdesproblem där differentialekvationen är av typ som studeras i kursen (och därmed framgår av andra lärmål).
18.1	redogöra för den allmänna formen för en *linjär differentialekvation.*
18.1	klassificera differentialekvationer m.a.p. *ordning*, linjär/icke-linjär, *homogen/inhomogen*, separabel, konstanta koefficienter.
18.1	skriva om en linjär differentialekvation på operatorform (se Remark sid 993).
2.10, 3.4, 7.9, 18.1, 18.2	redogöra kort för minst en tillämpning som leder till ett begynnelsevärdesproblem. Du skall också ur en löpande text som beskriver problem, som leder till begynnelse-värdesproblem, kunna sortera ut och ange begynnelsevillkor för sökt storhet. Vidare skall du kunna lösa begynnelsevärdesproblem där differentialekvationen är någon av de typer som studeras i kursen (och därmed framgår av andra lärmål).

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	**Mål**
3.4	redogöra för den *logistiska modellen* för populationstillväxt, vilket inbegriper att du också motiverar differentialekvationens utseende.
7.9	ställa upp och motivera differentialekvationer för problem som handlar om att studera koncentrationen av ett visst ämne i en vätske/gas-lösning som har ett visst tillflöde och/eller frånflöde av vätska/gas (se t.ex. Ex.4 sid 448).
7.9	veta vad som menas med en *kurvskara* (family of curves) och bestämma *ortogonalkurvor* till en given kurvskara.
18.2	lösa ekvationer av typen $y' = f(y/x)$ (*homogena ekvationer*).